



Propagation des ondes dans un domaine comportant des petites hétérogénéités : modélisation asymptotique et calcul numérique

Vanessa Mattesi

► To cite this version:

Vanessa Mattesi. Propagation des ondes dans un domaine comportant des petites hétérogénéités : modélisation asymptotique et calcul numérique. Analyse numérique [math.NA]. Université de Pau et des pays de l'Adour, 2014. Français. NNT : . tel-01111046

HAL Id: tel-01111046

<https://inria.hal.science/tel-01111046>

Submitted on 29 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par

Vanessa MATTESI

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

À

L'Université de Pau et des Pays de L'Adour

École doctorale des sciences et leurs applications - ED 211

DOMAINE DE RECHERCHE : Mathématiques appliquées

**Propagation des ondes
dans un domaine comportant des petites hétérogénéités :
modélisation asymptotique et calcul numérique**

Directeur de Thèse : **M. Sébastien Tordeux**

Soutenue le 11 décembre 2014

Après avis de :

M. Olivier LAFITTE	Professeur, Université Paris 13	Rapporteur
M. Gregory VIAL	Professeur, École Centrale de Lyon	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

Mme Hélène BARUCQ	Directrice de Recherche, INRIA	Examinatrice
M. Abderrahmane BENDALI	Professeur, Université et INSA Toulouse	Président du jury
M. Julien DIAZ	Chargé de recherches, INRIA	Examineur
M. Olivier LAFITTE	Professeur, Université Paris 13	Rapporteur
M. Sébastien TORDEUX	Maître de conférences, UPPA	Directeur de thèse
M. Gregory VIAL	Professeur, École Centrale de Lyon	Rapporteur

Équipe projet INRIA Magique-3D, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA)

Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de Pau, Unité mixte de recherche CNRS-UPPA 5142, Université de Pau et des pays de l'Adour (UPPA)

Enfin, merci à l'homme qui partage ma vie, Guillaume Willmann, pour ton soutien, ton attention, ton humour, ta patience, ton déplacement professionnel à Pau en fin de thèse pour être là au quotidien et pour toutes les sorties que tu as organisées pour me changer les idées, merci pour tout.

Table des matières

0.1	Problématique	9
0.2	Description du problème considéré	10
0.2.1	Domaine d'étude	11
0.2.2	Problème considéré	12
0.3	La méthode des développements asymptotiques raccordés	13
0.3.1	Difficultés numériques pour traiter les petits détails géométriques	13
0.3.2	Définition de modèles approchés adaptés au calcul numérique par l'analyse asymptotique	13
0.3.3	Présentation de la méthode des développements asymptotiques raccordés	14
0.3.4	Définition des deux domaines avec recouvrement	14
0.3.5	Développements formels en champ proche et en champ lointain	19
0.3.6	Raccord des deux développements en zone intermédiaire	22
0.4	Développements asymptotiques à l'ordre 2	23
0.4.1	Développement asymptotique en champ lointain à l'ordre 2	24
0.4.2	Développement asymptotique en champ proche à l'ordre 2	25
0.4.3	Raccord	27
0.5	Plan de la thèse	30
 I Développement asymptotique raccordé pour l'équation des ondes		33
1	Analyse en champ lointain	35
1.1	Solution causale de l'équation des ondes	35
1.1.1	Solution sortante de l'équation de Helmholtz	38
1.1.2	Les premiers multipôles en domaine fréquentiel	44
1.1.3	Détermination des parties singulières $\hat{\mathbf{S}}_\alpha$ pour les premiers multipôles	44
1.1.4	Solution causale de l'équation des ondes	49
1.1.5	Les premiers multipôles en domaine temporel	50
1.2	Solution anti-causale de l'équation des ondes	52
1.2.1	Solution entrante de l'équation de Helmholtz	53
1.2.2	Solution anti-causale de l'équation des ondes	53
1.3	Étude des solutions régulières de l'équation des ondes	54
1.3.1	Quelques solutions particulières régulières	54
1.3.2	Une base de solution régulière de l'équation des ondes	56
1.3.3	Représentation des solutions régulières de l'équation des ondes	59
1.3.4	La solution développée à l'ordre 2	64
1.4	Étude des solutions singulières de l'équation des ondes	65
1.4.1	Solution de l'équation des ondes sur une couronne solide	65
1.4.2	Représentation des solutions singulières de l'équation des ondes	72
1.5	Rappels des résultats obtenus	74
1.5.1	Développement modal	74
1.5.2	Développement asymptotique	75

2	Analyse en champ proche	77
2.1	Introduction	77
2.2	Développement modal du champ proche au voisinage de l'infini	78
2.2.1	Quelques notations	78
2.2.2	Développement modal du champ proche	79
2.3	Rappels sur le problème extérieur de Laplace	87
2.3.1	Condition de Neumann	87
2.3.2	Condition de Dirichlet	92
3	Définition du développement asymptotique à tout ordre	95
3.1	Introduction	95
3.1.1	Rappels sur le champ lointain	95
3.1.2	Rappels sur le champ proche	96
3.1.3	Conditions de raccord	96
3.2	Exploitation des conditions de raccord	97
3.2.1	Conséquence de la forme de l'Ansatz	97
3.2.2	Développement modal	97
3.3	Définition des termes du développement asymptotique	98
3.4	La fonction de raccord	101
3.4.1	Définitions	101
3.4.2	Estimation d'erreur de la fonction de raccord	102
4	Estimation d'erreurs	105
4.1	Approximation de la solution en champ lointain, champ proche	105
4.2	Stabilité	107
4.2.1	Stabilité d'un problème sur domaine borné	107
4.2.2	Preuve du théorème 4.4	108
4.3	Consistance	110
4.3.1	Décomposition du résidu	111
4.3.2	Consistance en champ proche	111
4.3.3	Consistance dans la zone de raccord	112
4.3.4	Preuve du théorème de consistance 4.5	115
4.4	Preuve des théorèmes d'estimation d'erreur	115
II	Outils numériques pour l'analyse asymptotique	119
5	Résolution directe à l'aide de la méthode de Galerkin Discontinue	123
5.1	Contexte d'étude pour la résolution directe	123
5.1.1	Pourquoi appliquer une approximation de Galerkin Discontinue?	125
5.2	Mise en œuvre de la méthode de Galerkin Discontinue	125
5.2.1	Notations	125
5.2.2	Discrétisation en espace	125
5.2.3	Préliminaires à la construction des matrices \mathcal{M} , \mathcal{K} et \mathcal{B}	130
5.2.4	Calcul de la matrice de masse \mathcal{M}	135
5.2.5	Calcul de la matrice de raideur \mathcal{K}	135
5.2.6	Calcul de la matrice d'amortissement \mathcal{B}	141
5.2.7	Discrétisation en temps	141
6	Implémentation de la méthode MAE	143
6.1	Contexte d'étude pour la résolution avec la méthode MAE (Matched Asymptotic Expansions)	143
6.2	Mise en œuvre de la méthode MAE	144
6.2.1	Calcul de u_0	145

6.2.2	Calcul des termes d'ordre supérieur	146
6.3	Résultats numériques	147
6.3.1	Validation de la solution u_0	148
6.3.2	Validation de u_1	156
6.3.3	Comparaison avec la méthode Directe	164
7	Méthode de raffinement espace-temps	175
7.1	Contexte d'étude pour les pas de temps locaux	175
7.2	Pas de temps locaux : Motivations	175
7.2.1	Pourquoi appliquer la méthode des pas de temps locaux?	175
7.3	Mise en œuvre de la méthode des pas de temps locaux	176
7.3.1	Introduction	176
7.3.2	Méthode de Galerkin Discontinue et pas de temps locaux	178
7.4	Résultats numériques	181
III	Annexes	189
A	Solution fondamentale de l'équation des ondes scalaire	191
B	Séparation de variables	193
B.1	Solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques	193
B.2	Solution de l'équation de Helmholtz homogène	194
C	La fonction Q_n	197
C.1	Définition et propriétés	197
C.2	Évaluation en -1	198
D	Théorie des inégalités inverses	201

Introduction

0.1 Problématique

Que ce soit en prospection pétrolière, en production d'énergie nucléaire, en médecine, ou pour conserver une oeuvre d'art, il n'est souvent pas possible d'effectuer des mesures directes pour des raisons de coût, de sécurité ou de santé. Les praticiens privilégient alors des mesures non intrusives. Plusieurs techniques existent et l'une d'elles consiste à éclairer l'objet par une onde et à récupérer des mesures sur la frontière de celui-ci.

En théorie du problème inverse, il est souvent affirmé qu'il n'est pas possible de déterminer les caractéristiques d'un objet dont la dimension caractéristique est plus petite que la longueur d'onde. Cette affirmation n'est pas complètement fondée. Les mathématiciens appliqués ont par exemple développé des méthodes pour détecter des petites hétérogénéités pour les problèmes de propagation d'ondes. Nous pouvons par exemple citer la méthode MUSIC, voir [29]. Cette méthode est basée sur une modélisation par source ponctuelle des petites hétérogénéités et sur le modèle de Foldy-Lax, voir [33] et [11], pour prendre en compte leur interaction. Bien qu'il existe des travaux d'analyse asymptotique qui s'intéressent à l'effet d'une petite perturbation géométrique pour les problèmes elliptiques ou quasi-elliptiques, voir [42], [28], [35], [41] et [12], ce n'est pas le cas pour les problèmes de propagation d'ondes en régime temporel.

Nous nous sommes fixés deux objectifs lors de cette thèse. Premièrement, nous avons voulu donner une base théorique pour les problèmes de perturbation géométrique singulière dans le cas des problèmes de propagation d'ondes. Deuxièmement, nous proposons des modèles réduits d'ordre élevé pour la modélisation par source ponctuelle. Nous pensons avoir un impact sur les applications suivantes :

Application à la prospection pétrolière. La prospection pétrolière est en pratique basée sur l'étude de la propagation d'ondes élastiques dans la croûte terrestre, générée par des sources explosives qui engendrent des ondes transitoires. L'étude de sismographes et l'utilisation de méthodes classiques de calcul numérique permettent de détecter des champs pétroliers dont la longueur caractéristique est supérieure à la longueur d'onde. L'exploitation de gisements de pétrole de petite taille, jusque là considérée non rentable, est maintenant envisagée par l'industrie pétrolière du fait de la forte augmentation du prix du pétrole.

Application à l'imagerie médicale. L'imagerie médicale est couramment utilisée pour la détection de tumeurs. La détection des tumeurs de petite taille permet un diagnostic précoce et améliore le pronostic pour les patients. D'autre part, les temps d'exposition et l'intensité du signal sont encadrés afin d'assurer une certaine sécurité au patient.

Utiliser des ondes en domaine transitoire permet de limiter la durée de l'examen.

Ce premier chapitre a pour objectif de présenter le problème considéré, la méthode des développements asymptotiques raccordés et d'explicitier le développement asymptotique à l'ordre 2 de notre

solution.

0.2 Description du problème considéré

Nous nous intéressons à la propagation d'ondes acoustiques dans un domaine comportant des *petites* hétérogénéités. Nous sommes en domaine temporel et nous travaillons en 3D (c'est à dire que nous travaillons avec quatre dimensions : trois pour l'espace et une pour le temps). Définissons un peu plus en détails ce que *petit* obstacle signifie. Notons ε le rayon de la boule dans laquelle notre obstacle est contenu, et λ la longueur d'onde, voir figure 1. Nous nous intéressons à des

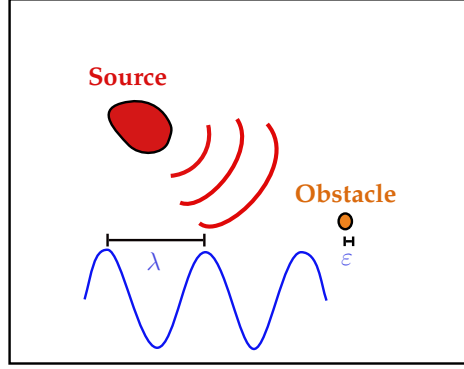


FIGURE 1 – Contexte d'étude

obstacles dont leur rayon vérifie (1)

$$\varepsilon \ll \lambda. \quad (1)$$

C'est ce que nous appellerons la condition asymptotique. Nous verrons dans le cadre de la thèse le cas d'un seul obstacle au sein du domaine. La généralisation au cas de plusieurs obstacles peut être déduit des résultats présents dans cette thèse.

Remarque 0.1. *Contrairement au régime fréquentiel où*

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \quad (2)$$

avec ω la pulsation et c la célérité de l'onde, la notion de longueur d'onde en régime temporel est difficile à définir. Elle passe par une transformée de Fourier temporelle

$$\hat{u}(\omega) = \int u(t) \exp(-i\omega t) dt. \quad (3)$$

Cette transformée permet de passer du régime temporel au régime fréquentiel et nous obtenons un signal qui peut prendre l'allure illustrée dans la figure 2.

Les longueurs d'ondes $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ du signal sont définies à partir des pulsations $\omega \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ pour lesquelles la transformée de Fourier du signal \hat{u} n'est pas négligeable. Lorsque λ_{\min} est proche de λ_{\max} , le signal est dit à faible bande, voir la figure 3, sinon il est dit à large bande. Plus précisément notre condition asymptotique s'écrit

$$\varepsilon \ll \lambda_{\min} = \frac{2\pi c}{\omega_{\max}}. \quad (4)$$

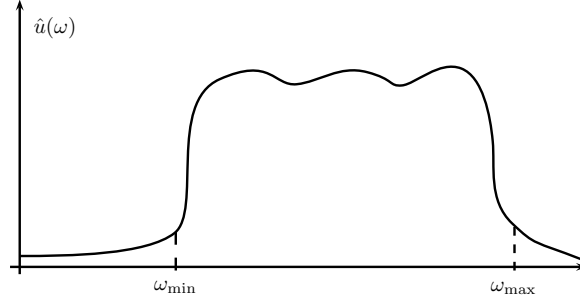


FIGURE 2 – Signal à large bande

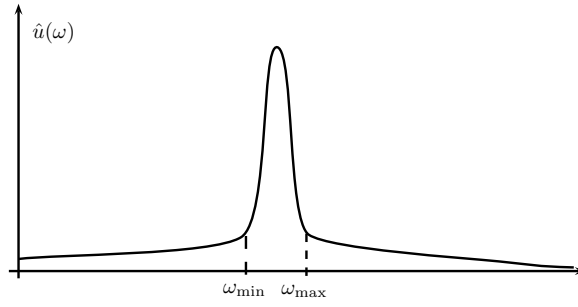


FIGURE 3 – Signal à faible bande

0.2.1 Domaine d'étude

Nous travaillons sur le domaine Ω_ε qui est l'extérieur de notre obstacle que nous noterons ω_ε . Expliquons un peu ces deux notations. L'obstacle ω_ε est un obstacle autosimilaire, c'est à dire qu'il est obtenu en multipliant une forme \hat{B} (ne dépendant pas de ε) par ε , voir figure 4.

$$\omega_\varepsilon = \varepsilon \hat{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \in \hat{B}\}, \quad (5)$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

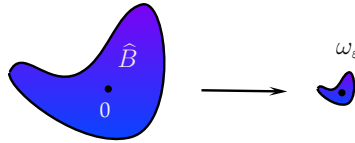


FIGURE 4 – Obstacle autosimilaire

Remarque 0.2. Puisque ε est plus petit que 1, ω_ε est une version réduite de \hat{B} .

Remarque 0.3. Notre obstacle ω_ε dépend de ε , c'est pourquoi ε apparaît dans sa notation. Nous dirons aussi que ε est la longueur caractéristique de l'élément.

Remarque 0.4. Notre obstacle est centré en l'origine, remarquons que nous pouvons toujours nous ramener à ce cas par une translation.

Revenons à notre domaine d'étude Ω_ε , nous avons

$$\Omega_\varepsilon := \mathbb{R}^3 \setminus \omega_\varepsilon. \quad (6)$$

La figure 5 illustre ce domaine.

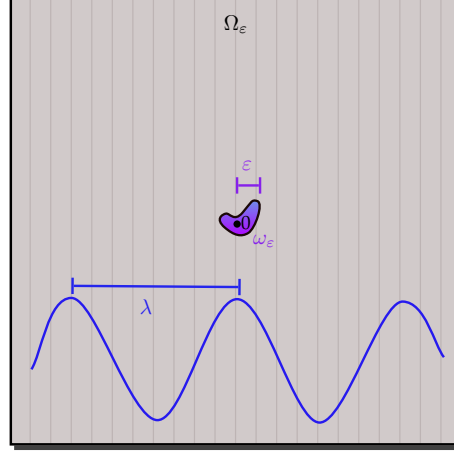


FIGURE 5 – Domaine Ω_ε

Remarque 0.5. Le domaine Ω_ε est défini comme l'extérieur de l'obstacle ω_ε , ce dernier dépend de ε , d'où Ω_ε aussi, ce qui explique cette notation.

0.2.2 Problème considéré

Nous allons à présent décrire le problème considéré en détails. Commençons par rappeler l'équation des ondes acoustiques

$$c^2 \Delta \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad (7)$$

avec $\mathbf{x} \in \Omega_\varepsilon$, c la célérité de l'onde, $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ le terme source et $t > 0$.

Remarque 0.6. Il n'est pas nécessaire d'avoir f aussi régulière, nous pouvons très bien développer la théorie dans le cas f continue en temps et à valeurs $L^2(\Omega_\varepsilon)$.

Remarque 0.7. Nous avons noté la solution de l'équation \tilde{u}_ε car la solution dépend du domaine Ω_ε qui lui même dépend de ε . En effet, nous pouvons facilement concevoir que la solution sera différente si nous changeons la taille de notre obstacle.

Remarque 0.8. Nous avons noté $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ un élément de \mathbb{R}^3 .

Nous allons ajouter des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur la frontière de notre obstacle notée $\Gamma_{\omega_\varepsilon}$

$$\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\omega_\varepsilon}, \quad t > 0, \quad (8)$$

ou

$$\partial_n \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\omega_\varepsilon}, \quad t > 0. \quad (9)$$

Nous ajoutons également deux conditions initiales homogènes sur Ω_ε

$$\begin{cases} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \\ \partial_t \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Enfin, nous imposons au terme source f d'être à support compact et qu'il vérifie

$$\mathbf{0} \notin \text{supp}(f(\cdot, t)), \quad \forall t \geq 0. \quad (11)$$

Remarque 0.9. *Comme le support ne dépend pas de ε , pour ε assez petit, la distance de l'origine au support est très grande devant ε .*

En pratique, l'obstacle est fixé, il faut donc prendre f suffisamment éloignée de l'origine.

Afin de résoudre ce problème, nous avons décidé d'utiliser la méthode des développements asymptotiques raccordés que nous allons décrire dans la section 0.3.

0.3 La méthode des développements asymptotiques raccordés

Dans cette partie, nous allons d'abord décrire pourquoi nous utilisons cette méthode, puis, nous détaillerons son fonctionnement.

0.3.1 Difficultés numériques pour traiter les petits détails géométriques

La présence de petits détails géométriques dans le domaine de calcul provoque de nombreuses difficultés numériques. Premièrement, il faut adapter la taille δ_x du maillage en espace à la plus petite longueur caractéristique (ici ε le rayon de la boule contenant l'obstacle). Nous devons respecter la relation suivante

$$\delta_x < \text{Cte} \varepsilon. \quad (12)$$

La constante Cte a été introduite car il faut mailler la géométrie de taille ε . Par exemple, pour une boule de rayon ε , il faut que $\delta_x < \frac{\varepsilon}{20}$ pour que la géométrie soit correctement discrétisée. Lorsque nous voulons utiliser un maillage uniforme, ceci introduit un très grand nombre de degrés de libertés et donc un coût de calcul exorbitant.

Une solution consiste à effectuer un raffinement de maillage local. Malheureusement, en régime temporel, il est nécessaire que le pas de temps vérifie la condition de Courant, Friedrichs et Lewy (CFL). Ceci introduit un pas de temps petit (de l'ordre de $\frac{\varepsilon}{c}$) et a pour conséquence d'augmenter le coût de calcul.

Deuxièmement, afin d'éviter les phénomènes de dispersion numérique, il est nécessaire de choisir le plus grand pas de temps vérifiant la condition CFL. Ceci est impossible dans un maillage contenant des mailles de tailles trop différentes entre elles. Les numériciens ont développé voir par exemple [19], [23], des méthodes de pas de temps locaux afin de lutter contre les phénomènes de dispersion. Dans cette thèse, nous souhaitons développer des méthodes alternatives. Ces techniques sont efficaces mais difficiles à mettre en œuvre.

0.3.2 Définition de modèles approchés adaptés au calcul numérique par l'analyse asymptotique

En parallèle de ces méthodes purement numériques, les mathématiciens appliqués ont développé des modèles approchés basés sur de l'analyse asymptotique. Dans notre domaine, la propagation d'ondes, nous pouvons grossièrement séparer les différentes méthodes en deux familles :

- l'analyse asymptotique régulière,
- l'analyse asymptotique singulière.

Ces deux techniques cherchent à développer la solution, qui dépend d'un paramètre ε , sous la forme d'une série de Taylor dans chaque domaine d'intérêt

$$\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^I f_i(\varepsilon) u_i(\mathbf{x}) + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(f_{I+1}(\varepsilon)). \quad (13)$$

Les f_i sont les fonctions de jauge, elles sont très souvent polynomiales

$$f_i(\varepsilon) = \varepsilon^i. \quad (14)$$

Dans le cas de l'analyse asymptotique régulière, les termes u_i du développement asymptotique appartiennent au même espace fonctionnel que la solution \tilde{u}_ε , en général l'espace variationnel. Pour l'analyse asymptotique régulière, le lecteur pourra se référer par exemple à [2] et [8].

Dans le cas de l'analyse asymptotique singulière, les termes u_i du développement asymptotique sont plus singuliers que la solution \tilde{u}_ε . Pour l'analyse asymptotique singulière, nous pouvons citer [13], [15], [30] et [42].

Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons la méthode des développements asymptotiques raccordés qui fait partie de l'analyse asymptotique singulière. Notre objectif est de remplacer le petit obstacle par une source ponctuelle équivalente afin de modéliser avec précision son interaction avec le milieu. Le petit paramètre ε n'apparaît plus comme une longueur géométrique mais comme une amplitude de source ponctuelle. La discrétisation de ce nouveau problème ne nécessite plus de raffinement de maillage espace-temps.

0.3.3 Présentation de la méthode des développements asymptotiques raccordés

La méthode des développements asymptotiques raccordés consiste à construire deux différents développements (en champ proche et en champ lointain) de \tilde{u}_ε en variables rapides (près de l'obstacle) et en variables lentes (loin de l'obstacle). A priori, aucun de ces développements n'est défini sur tout le domaine. Ils doivent être raccordés dans une zone intermédiaire.

La méthode consiste donc à raccorder les comportements asymptotiques quand $\mathbf{X} := \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$ du développement en champ proche avec les comportements asymptotiques quand $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ en champ lointain. Nous notons $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

Pour résumer, nous pouvons dire que cette méthode se déroule en trois principales étapes :

- la première consiste à définir deux domaines avec un recouvrement. Nous verrons dans la partie 0.3.4 que nous aurons un domaine nommé champ proche, un autre champ lointain et qu'il existe un recouvrement entre ces deux domaines que nous nommerons zone intermédiaire ou encore zone de raccord,
- lors de la seconde étape nous obtenons deux développements asymptotiques de la solution, un en champ proche et un en champ lointain, c'est ce que nous verrons dans la section 0.3.5,
- enfin, nous raccorderons les deux développements dans la zone intermédiaire afin d'obtenir une solution valide sur tout le domaine. Nous expliciterons ce raccord de façon formelle à la section 0.3.6.

0.3.4 Définition des deux domaines avec recouvrement

Nous avons un premier domaine que nous nommons *domaine de champ lointain*. Il est défini comme l'extérieur d'un voisinage de notre obstacle. Prenons notre voisinage de la forme d'une boule centrée en l'origine et de rayon $\eta_f(\varepsilon)$

$$B_{\eta_f(\varepsilon)} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < \eta_f(\varepsilon)\}. \quad (15)$$

Notons Ω_ε^f notre domaine de champ lointain, voir figure 6

$$\Omega_\varepsilon^f := \mathbb{R}^3 \setminus B_{\eta_f(\varepsilon)}. \quad (16)$$

Remarque 0.10. Nous avons pris f comme indice pour désigner le domaine de champ lointain (far-field).

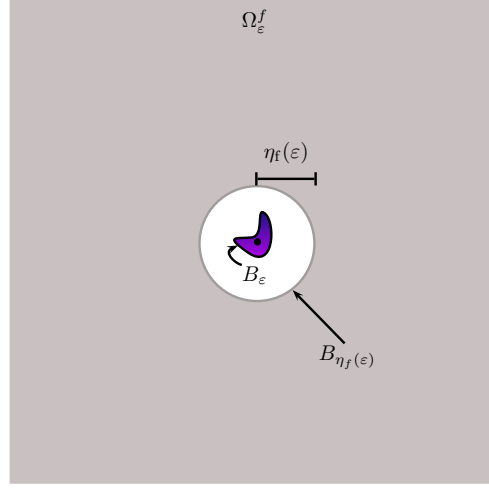


FIGURE 6 – Domaine de champ lointain Ω_ε^f

Remarque 0.11. Nous verrons plus tard que la longueur $\eta_f(\varepsilon)$ caractérise la zone de validité du champ lointain.

Le second domaine (d'introduction car l'ordre n'a pas d'importance) est le *domaine de champ proche*, noté Ω_ε^n , voir la figure 7. Comme son nom l'indique, c'est un domaine proche de l'obstacle

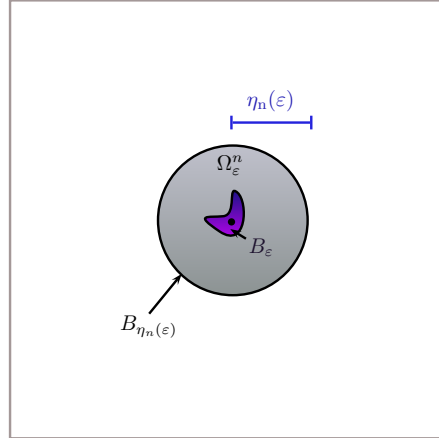


FIGURE 7 – Domaine de champ proche Ω_ε^n

qui sert à décrire les phénomènes physiques ayant lieu au voisinage de celui-ci

$$\Omega_\varepsilon^n := B_{\eta_n(\varepsilon)} \setminus \omega_\varepsilon, \quad (17)$$

avec $B_{\eta_n(\varepsilon)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < \eta_n(\varepsilon)\}$, ω_ε notre obstacle et $\eta_n(\varepsilon)$ une distance.

Remarque 0.12. Nous avons pris n comme indice pour désigner le domaine de champ proche (near-field).

Remarque 0.13. La distance $\eta_n(\varepsilon)$ caractérise la zone de validité du champ proche. Elle dépend de ε .

Enfin, définissons la zone de raccord. Ce recouvrement existe si et seulement si la condition suivante est respectée

$$\eta_f(\varepsilon) < \eta_n(\varepsilon). \quad (18)$$

Dans ce cas, nous notons $C_{\eta_f(\varepsilon)}^{\eta_n(\varepsilon)}$ la couronne de petit rayon $\eta_f(\varepsilon)$ et de grand rayon $\eta_n(\varepsilon)$

$$C_{\eta_f(\varepsilon)}^{\eta_n(\varepsilon)} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \eta_f(\varepsilon) \leq |\mathbf{x}| \leq \eta_n(\varepsilon)\}. \quad (19)$$

La zone de raccord, notée Ω_ε^m , est définie par cette couronne, voir figure 8.

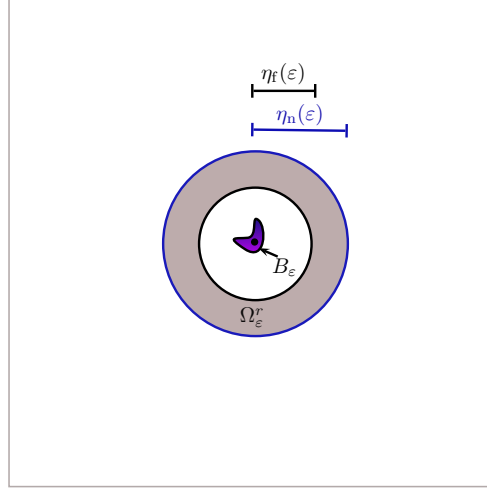


FIGURE 8 – Zone de raccord

Remarque 0.14. Nous avons pris m comme indice pour la zone de recouvrement (matching zone).

Remarque 0.15. La zone de raccord est l'intersection entre les domaines de champ lointain et de champ proche

$$\Omega_\varepsilon^m := \Omega_\varepsilon^f \cap \Omega_\varepsilon^n. \quad (20)$$

Ceci signifie que dans la zone de raccord, les points de vue de champ lointain et de champ proche peuvent être adoptés. En d'autres termes, notre domaine d'étude Ω_ε peut être vu comme

$$\Omega_\varepsilon = (\Omega_\varepsilon^f \cup \Omega_\varepsilon^n) \setminus \Omega_\varepsilon^m. \quad (21)$$

Nous avons ainsi défini nos deux domaines avec recouvrement. Afin de finaliser cette première étape, voyons comment se comportent ces zones lorsque ε tend vers 0. Nous avons besoin des limites suivantes

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_f(\varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_f(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty, \end{cases} \quad (22)$$

pour $\eta_f(\varepsilon)$ et pour $\eta_n(\varepsilon)$ nous avons également

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_n(\varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_n(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty. \end{cases} \quad (23)$$

Commençons par le champ lointain. La limite intéressante dans ce cas est la suivante

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_f(\varepsilon) = 0. \quad (24)$$

Ceci signifie que le voisinage de notre obstacle va disparaître lorsque ε tend vers 0, il ne restera plus que l'origine, voir figure 9. Le domaine limite de champ lointain est noté Ω^*

$$\Omega^* := \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (25)$$

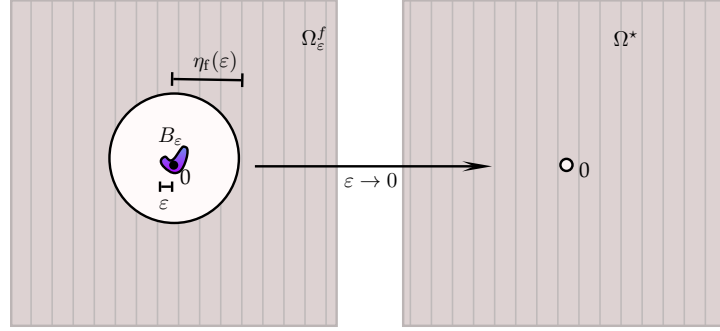


FIGURE 9 – Variation du champ lointain lorsque ε tend vers 0

Pour le champ proche, nous commençons par faire le changement de variables

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}. \quad (26)$$

Puisque nous nous intéressons à des cas asymptotiques, ε est plus petit que 1, ce changement de variables a donc pour effet de zoomer autour de l'obstacle, voir figure 10.

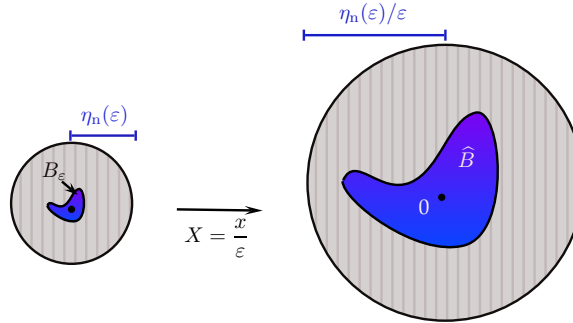


FIGURE 10 – Adimensionnement

Remarque 0.16. Cette étape de changement de variables est aussi appelée adimensionnement. En effet, \mathbf{X} est sans unité.

Remarque 0.17. En faisant ce changement de variables, nous réobtenons la forme d'origine \hat{B} qui ne dépend plus de ε . En effet, rappelons que notre obstacle ω_ε avait été construit en multipliant \hat{B} par ε .

Passons à la limite lorsque ε tend vers 0. La limite utile est la suivante

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_n(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty. \quad (27)$$

Ceci signifie que notre domaine limite de champ proche noté $\hat{\Omega}$ sera

$$\hat{\Omega} := \mathbb{R}^3 \setminus \hat{B}, \quad (28)$$

voir la figure 11.

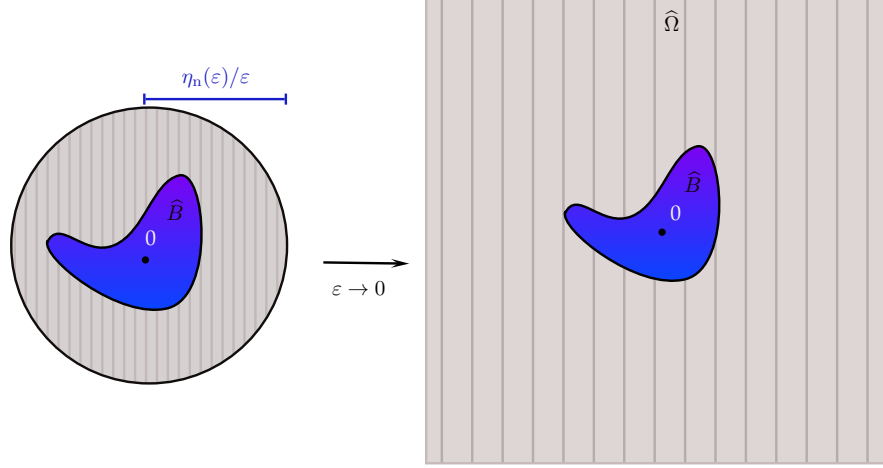


FIGURE 11 – Variation du champ proche lorsque ε tend vers 0

Remarque 0.18. Puisque \hat{B} ne dépend pas de ε , la forme \hat{B} reste inchangée lorsque ε tend vers 0.

Enfin, voyons comment varie la zone de raccord lorsque ε tend vers 0. Pour la zone intermédiaire, nous pouvons soit être en variables \mathbf{x} soit en variables \mathbf{X} . Si nous raisonnons en variables \mathbf{x} , nous avons vu que $\Omega_\varepsilon^m = C_{\eta_f(\varepsilon)}^{\eta_n(\varepsilon)}$. Les limites importantes dans ce cas sont

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_f(\varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_n(\varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Par conséquent, en la variable \mathbf{x} , le domaine Ω_ε^m se concentre en $\mathbf{0}$. Passons en variables \mathbf{X} . Nous avons

$$C_{\eta_f(\varepsilon)}^{\eta_n(\varepsilon)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \eta_f(\varepsilon) \leq |\mathbf{x}| \leq \eta_n(\varepsilon)\}. \quad (30)$$

Il suit dans la variable \mathbf{X}

$$C_{\eta_f(\varepsilon)/\varepsilon}^{\eta_n(\varepsilon)/\varepsilon} = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 : \frac{\eta_f(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq |\mathbf{X}| \leq \frac{\eta_n(\varepsilon)}{\varepsilon}\}. \quad (31)$$

Les limites intéressantes dans ce cas sont

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_f(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_n(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty. \end{cases} \quad (32)$$

Par conséquent, en variable \mathbf{X} , la zone de raccord est rapidement rejetée en l'infini.

Conclusion

Nous avons déterminé nos deux domaines avec recouvrement et nous avons étudié leur comportement quand ε tend vers 0. Ceci achève la première étape de la méthode des développements asymptotique raccordés.

0.3.5 Développements formels en champ proche et en champ lointain

Nous pouvons à présent construire deux développements de notre solution :

- un en champ lointain que nous noterons u_ε ,
- un en champ proche que nous noterons U_ε pour se référer au changement de variables \mathbf{X} .

Développement asymptotique en champ lointain

Le développement en champ lointain est défini dans le domaine de champ lointain Ω_ε^f . Dans cette section, nous agissons de façon formelle sans nous préoccuper de la convergence des séries car le but est d'expliquer la méthode des développements asymptotiques raccordés. C'est pourquoi nous utilisons le symbole \sim . La série de champ lointain s'écrit

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \sim \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(\mathbf{x}, t) \varepsilon^i, \quad (33)$$

avec u_i des fonctions définies sur $\Omega^* \times \mathbb{R}$, avec $\Omega^* = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Remarque 0.19. La série u_ε approche notre solution exacte \tilde{u}_ε loin de l'obstacle. Nous démontrerons ce résultat au chapitre 4. En particulier, nous montrerons que la série de champ lointain tronquée à l'ordre I approche la solution exacte \tilde{u}_ε avec un reste de l'ordre du premier terme négligé, c'est à dire $O(\varepsilon^{I+1})$. Pour le moment, nous écrivons cette série de façon formelle car elle n'est pas nécessairement convergente.

Remarque 0.20. Les fonctions u_i sont potentiellement singulières en l'origine. Insistons sur le fait que u_i ne dépend plus de ε . C'est très important car une fois que nous aurons calculé les fonctions u_i , nous pourrons facilement obtenir u_ε , pour différents ε , c'est à dire pour différentes tailles d'obstacle.

Remarque 0.21. La fonction u_0 est la limite formelle de u_ε dans la variable \mathbf{x}

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \sim u_0(\mathbf{x}, t). \quad (34)$$

Nous démontrerons au chapitre 4, plus précisément au théorème 4.1 que

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, t) - u_0(\cdot, t)\|_{L^2(B_{r^*}^c)} = O(\varepsilon), \quad (35)$$

pour tout $r^* > 0$ et $B_{r^*}^c = \mathbb{R}^3 \setminus B_{r^*}$.

Le développement asymptotique en champ lointain approche la solution exacte loin de l'obstacle, nous pouvons alors insérer le développement (33) dans l'équation des ondes (7), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(c^2 \Delta u_i(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_i(\mathbf{x}, t) \right) \varepsilon^i \sim f(\mathbf{x}, t). \quad (36)$$

En identifiant les termes de chaque côté de l'équation (36) nous avons

$$c^2 \Delta u_0(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_0(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad (37)$$

et pour $i \geq 1$

$$\Delta u_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} u_i(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (38)$$

De même, pour les conditions initiales nous obtenons

$$u_i(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t u_i(\mathbf{x}, 0) = 0. \quad (39)$$

Nous avons finalement les problèmes suivants à résoudre. Trouver $u_0 : \Omega^\star \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} c^2 \Delta u_0(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_0(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, \end{cases} \quad (40)$$

et trouver $u_i : \Omega^\star \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i \geq 1$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} u_i(\mathbf{x}, t) = 0, \\ u_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \partial_t u_i(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (41)$$

Information manquante du développement en champ lointain

Ces problèmes ne sont pas bien posés car les u_i sont définis que pour $\mathbf{x} \in \Omega^\star$ en espace, c'est à dire en dehors de l'origine. Leur résolution fait l'objet du chapitre 1. Il nous manque le comportement des u_i près de l'obstacle. Plus précisément, nous devons déterminer leur singularité en l'origine.

Développement asymptotique en champ proche

Rappelons le changement de variables

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}. \quad (42)$$

Le développement en champ proche est défini dans le domaine de champ proche Ω_ε^n . Nous pouvons développer la solution sous la forme suivante

$$u_\varepsilon(\mathbf{X}\varepsilon, t) = U_\varepsilon(\mathbf{X}, t) \sim \sum_{i=0}^{+\infty} U_i(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i, \quad (43)$$

avec U_i des fonctions définies sur $\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}$ et $\widehat{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{B}$. Nous allons faire des remarques similaires à celles pour le développement en champ lointain.

Remarque 0.22. La série U_ε approche notre solution exacte \tilde{u}_ε au voisinage de l'obstacle. Nous démontrerons ce résultat au chapitre 4. Pour le moment, nous écrivons cette série de façon formelle car elle n'est pas nécessairement convergente.

Remarque 0.23. Les fonctions U_i ne sont pas bornées au voisinage de l'infini. Insistons sur le fait que U_i ne dépend plus de ε . Comme pour le champ lointain, c'est très important car une fois que nous aurons calculé les fonctions U_i , nous pourrons facilement obtenir U_ε , quelque soit ε .

Le développement asymptotique en champ proche approche la solution exacte dans un voisinage de l'obstacle, nous pouvons alors insérer ce développement (43) dans l'équation des ondes sur Ω_ε^n , voir (7), nous obtenons

$$\Delta \sum_{i=0}^{+\infty} U_i(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i - \frac{\partial_t^2}{c^2} \sum_{i=0}^{+\infty} U_i(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i \sim f(\mathbf{X}\varepsilon, t). \quad (44)$$

Dans la variable \mathbf{X} , le terme source f est rejeté à l'infini. Il n'apparaît plus dans les problèmes de champ proche. Nous devons à présent prendre en compte le changement de variables

$$\mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}. \quad (45)$$

Ce changement de variables implique de définir un opérateur Laplacien en variables \mathbf{X}

$$\Delta_{\mathbf{X}} = \partial_{X_1}^2 + \partial_{X_2}^2 + \partial_{X_3}^2 = \varepsilon^2 (\partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2) = \varepsilon^2 \Delta. \quad (46)$$

En insérant ce nouvel opérateur dans (44) nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_{\mathbf{X}} U_i(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\partial_t^2}{c^2} U_i(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i = 0. \quad (47)$$

Un changement d'indices s'impose pour la première somme, $i = i - 2$

$$\sum_{i=-2}^{+\infty} \Delta_{\mathbf{X}} U_{i+2}(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i - \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\partial_t^2}{c^2} U_i(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i = 0. \quad (48)$$

L'équation (48) permet de définir par identification les équations que vérifient les U_i . En effet, nous pouvons remarquer que nous avons deux termes avec des puissances négatives pour ε (pour $i = -2$ et $i = -1$) et aucun dans la seconde, nous en déduisons

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U_0(\mathbf{X}, t) = 0 \\ \Delta_{\mathbf{X}} U_1(\mathbf{X}, t) = 0. \end{cases} \quad (49)$$

Et ensuite, pour tout $i \geq 0$, nous avons

$$\Delta_{\mathbf{X}} U_{i+2}(\mathbf{X}, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_i(\mathbf{X}, t) = 0. \quad (50)$$

Remarque 0.24. Les équations (49) et (50) ne font plus intervenir ε .

Remarque 0.25. Les fonctions U_0 et U_1 vérifient l'équation de Laplace et les fonctions U_i pour $i \geq 0$ vérifient le système d'équations dit de Laplace emboîtée.

Remarque 0.26. Nous pouvons noter que dans les équations (49) et (50) la variable de temps t peut être vue comme un paramètre. Ces problèmes sont dits quasi-statiques.

Pour les conditions de bord à la frontière de l'obstacle, en variables \mathbf{x} nous avons mis des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur $\Gamma_{\omega_\varepsilon}$. En passant en variables \mathbf{X} , nous obtenons des conditions de bord sur la frontière de \hat{B} , notée $\Gamma_{\hat{B}}$

$$U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{\hat{B}}, \quad t > 0, \quad (51)$$

ou

$$\partial_n U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{\hat{B}}, \quad t > 0. \quad (52)$$

Nous dirons que U_0 et U_1 appartiennent au noyau de l'équation (50). Nous avons finalement le problème suivant à résoudre. Trouver $U_i : \hat{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U_{i+2}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} U_i(\mathbf{X}, t), \\ U_i(\mathbf{X}, 0) = 0, \quad \partial_t U_i(\mathbf{X}, 0) = 0, \\ U_i(\mathbf{X}, t) = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_n U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \text{pour} \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{\hat{B}}, \\ U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall i < 0. \end{cases} \quad (53)$$

Remarque 0.27. Ces problèmes ne sont pas bien posés et leur résolution fait l'objet du chapitre 2.

Information manquante du développement en champ proche

Une fois que nous avons construit notre développement en champ proche, nous avons décrit la solution du problème au voisinage de l'obstacle mais il nous manque le comportement au voisinage de l'infini des termes de champ proche.

Conclusion

Nous avons déterminé deux développements asymptotiques de notre solution, un en champ lointain et un en champ proche. Ceci finalise la seconde étape de la méthode des développements asymptotiques raccordés.

0.3.6 Raccord des deux développements en zone intermédiaire

La dernière étape de la méthode des développements asymptotiques raccordés consiste à *raccorder* les deux développements dans la zone intermédiaire. En effet, rappelons que dans ce domaine nous sommes à la fois en domaine de champ lointain et de champ proche. Dans cette zone nous pouvons alors développer notre solution de deux façons : du point de vue du champ lointain ou du champ proche. Cette étape a été rédigée sans aucune considération de convergence de série et doit être comprise au sens du calcul formel. En nous plaçant en variables \mathbf{x} , nous avons alors cette égalité de façon formelle pour le moment

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \sim U_\varepsilon(\mathbf{X}, t), \quad \text{avec} \quad \mathbf{X} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}. \quad (54)$$

Remplaçons u_ε et U_ε par leur développement que nous avons trouvé en (33) et (43), il suit

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i(\mathbf{x}, t) \varepsilon^i \sim \sum_{i=0}^{+\infty} U_i\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) \varepsilon^i. \quad (55)$$

Nous introduisons les conditions de nullité suivante

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}, t) = 0, & \forall i < 0, \\ U_i(\mathbf{X}, t) = 0, & \forall i < 0. \end{cases} \quad (56)$$

L'égalité (55) devient

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} u_i(\mathbf{x}, t) \varepsilon^i \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} U_i\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right) \varepsilon^i. \quad (57)$$

La suite commence à devenir technique, nous poserons correctement toutes les définitions dans le chapitre 3. Nous allons simplement expliquer comment cette méthode de raccord fonctionne sans rentrer dans les détails. Nous passons en coordonnées sphériques

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = r \cos \theta, \quad (58)$$

et

$$X_1 = R \sin \theta \cos \varphi, \quad X_2 = R \sin \theta \sin \varphi, \quad X_3 = R \cos \theta. \quad (59)$$

Pour chaque i , nous développons u_i au voisinage de $\mathbf{0}$ sous la forme

$$u_i(\mathbf{x}, t) \sim \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p, \quad (60)$$

puis U_i au voisinage de l'infini

$$U_i(\mathbf{X}, t) \sim \sum_{p=-\infty}^{+\infty} U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p, \quad (61)$$

avec $u_{i,p}$ et $U_{i,p}$ des fonctions ne dépendant plus de r ou R . En incluant (60) et (61) dans (55), nous obtenons

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \varepsilon^i \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} U_{i,p}(\theta, \varphi, t) \frac{r^p}{\varepsilon^p} \varepsilon^i. \quad (62)$$

Il suit

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \varepsilon^i \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} U_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \varepsilon^{i-p}. \quad (63)$$

Faisons un changement d'indice $i = i - p$ pour la somme de droite, nous obtenons

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \varepsilon^i \sim \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} U_{i+p,p}(\theta, \varphi, t) r^p \varepsilon^i. \quad (64)$$

La condition de raccord est finalement donnée par

$$u_{i,p}(\theta, \varphi, t) = U_{i+p,p}(\theta, \varphi, t), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}, \quad (65)$$

ou de manière équivalente

$$U_{i,p}(\theta, \varphi, t) = u_{i-p,p}(\theta, \varphi, t), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall p \in \mathbb{Z}. \quad (66)$$

Ce raccord est très important car l'information manquante du développement du champ lointain va être donnée par les éléments du développement du champ proche grâce à (65). De même, l'information manquante du développement du champ proche va être déterminée grâce à (66) par les éléments du développement du champ lointain. Nous allons finalement pouvoir construire un développement de notre solution valide sur tout le domaine Ω_ε . Il suit des conventions de nullité (56) que

$$u_{i,p}(\theta, \varphi, t) = U_{i,p}(\theta, \varphi, t) \equiv 0, \quad \forall i < 0, \forall p \in \mathbb{Z}, \quad (67)$$

et à l'aide des conditions de raccord, nous obtenons

$$u_{i,p}(\theta, \varphi, t) = 0 \quad \text{pour } p < -i \quad \text{et} \quad U_{i,p}(\theta, \varphi, t) = 0 \quad \text{pour } p > i. \quad (68)$$

Nous pouvons alors simplifier les développements de u_i et U_i

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}, t) \sim \sum_{p=-i}^{+\infty} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p, \\ U_i(\mathbf{x}, t) \sim \sum_{p=-\infty}^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p. \end{cases} \quad (69)$$

La justification rigoureuse de ces raccords apparaîtra au chapitre 3 lors de l'estimation de l'erreur de raccord. Ceci clôture la présentation de la méthode des développements asymptotiques raccordés.

0.4 Développements asymptotiques à l'ordre 2

Dans cette section nous allons expliciter le développement asymptotique à l'ordre 2 dans le cas d'un obstacle sphérique de rayon ε avec des conditions de Dirichlet sur le bord. C'est le cas que nous avons codé au cours de la thèse, nous expliquerons dans la partie II comment nous l'avons implémenté. C'est le résultat qui a le plus d'intérêt au niveau pratique.

0.4.1 Développement asymptotique en champ lointain à l'ordre 2

Nous notons $u_{\varepsilon,2}$ le développement asymptotique en champ lointain à l'ordre 2. Nous avons

$$u_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) + u_1(\mathbf{x}, t)\varepsilon + u_2(\mathbf{x}, t)\varepsilon^2. \quad (70)$$

La limite u_0 de \tilde{u}_ε est la solution régulière du problème posé sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$

$$\begin{cases} c^2 \Delta u_0(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_0(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (71)$$

Le problème (71) est bien posé et a une unique solution. Nous avons d'après (69)

$$u_0(\mathbf{x}, t) \sim \sum_{p=0}^{+\infty} u_{0,p}(\theta, \varphi, t) r^p. \quad (72)$$

Remarque 0.28. Pour déterminer u_0 , u_1 et u_2 , nous avons besoin de U_0 , U_1 et U_2 . Les conditions de raccord reliant ces six termes, voir (65) et (66), ne font intervenir que

$$u_{i,p} \quad \text{pour} \quad i + p \leq 2 \quad \text{et} \quad U_{i,p} \quad \text{pour} \quad i - p \leq 2. \quad (73)$$

C'est pourquoi nous développerons u_0 jusqu'à l'ordre $O(r^2)$, u_1 à l'ordre $O(r)$, u_2 à l'ordre $O(1)$, U_0 à l'ordre $O(\frac{1}{R^2})$, U_1 à l'ordre $O(\frac{1}{R})$ et U_2 à l'ordre $O(1)$ inclus.

En particulier, pour u_0 nous développons à l'ordre 2, nous avons

$$u_0(\mathbf{x}, t) = u_{0,0}(\theta, \varphi, t) + u_{0,1}(\theta, \varphi, t)r + u_{0,2}(\theta, \varphi, t)r^2 + O(r^3). \quad (74)$$

Les termes de ce développement peuvent être identifiés au développement de Taylor à l'ordre 2

$$u_0(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{0}, t) + \nabla u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot H u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{x} + O(r^3), \quad (75)$$

avec H la hessienne et $\mathbf{x} = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$. Il suit

$$u_0(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{0}, t) + \left(\nabla u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \right) r + \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{x}}{r} \cdot H u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \frac{\mathbf{x}}{r} \right) r^2 + O(r^3). \quad (76)$$

Remarque 0.29. Nous avons \mathbf{x}/r qui ne dépend plus de r , en effet

$$\frac{\mathbf{x}}{r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta). \quad (77)$$

En identifiant (74) et (76) nous en déduisons $u_{0,0}$, $u_{0,1}$ et $u_{0,2}$

$$\begin{cases} u_{0,0}(\theta, \varphi, t) = u_0(\mathbf{0}, t), \\ u_{0,1}(\theta, \varphi, t) = \nabla u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}, \\ u_{0,2}(\theta, \varphi, t) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{x}}{r} \cdot H u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \frac{\mathbf{x}}{r}. \end{cases} \quad (78)$$

Nous allons à présent déterminer u_1 et u_2 , rappelons qu'ils sont tous deux des solutions sur $\Omega^* \times \mathbb{R}$ de

$$\begin{cases} \Delta u_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} u_i(\mathbf{x}, t) = 0, \\ u_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \partial_t u_i(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (79)$$

Afin d'alléger la présentation, supposons que u_1 et u_2 peuvent être représentés à l'aide d'un champ rayonné par une source ponctuelle d'amplitude $g_i(t)$ localisée en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, c'est à dire

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{g_i(t - r/c)}{r}, \quad \text{pour } i = 1 \quad \text{et } i = 2, \quad (80)$$

avec r/c le temps que met l'onde pour arriver au point courant \mathbf{x} , g_i une fonction définie sur Ω^* vérifiant $g_i(t) = 0, \forall t < 0$.

Remarque 0.30. *Nous n'avons pas fixé g_i mais simplement donné la forme générale de u_i . C'est la condition de raccord qui déterminera l'amplitude de la source équivalente.*

Nous pouvons détailler les $u_{i,p}$ pour $i = 1$ et 2 . Commençons par u_1 , d'après (80) nous avons

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{g_1(t - r/c)}{r}. \quad (81)$$

Faisons un développement de Taylor à l'ordre 2 de $g_1(t - r/c)$

$$g_1(t - r/c) = g_1(t) - \partial_t g_1(t) \frac{r}{c} + \partial_t^2 g_1(t) \frac{r^2}{2c^2} + O_{r \rightarrow 0}(r^3). \quad (82)$$

Il suit

$$u_1(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{g_1(t)}{r} - \frac{\partial_t g_1(t)}{c} + \frac{\partial_t^2 g_1(t)}{2c^2} r \right) + O_{r \rightarrow 0}(r^2). \quad (83)$$

Nous obtenons alors

$$\begin{cases} u_{1,-1}(\theta, \varphi, t) = \frac{g_1(t)}{4\pi}, \\ u_{1,0}(\theta, \varphi, t) = -\frac{\partial_t g_1(t)}{4\pi c}, \\ u_{1,1}(\theta, \varphi, t) = \frac{\partial_t^2 g_1(t)}{8\pi c^2}. \end{cases} \quad (84)$$

Passons à u_2 , d'après (80)

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \frac{g_2(t - r/c)}{4\pi r}. \quad (85)$$

En faisant un développement de Taylor à l'ordre 1 de $g_2(t - r/c)$ nous obtenons

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \frac{g_2(t)}{4\pi r} - \frac{\partial_t g_2(t)}{4\pi c} + O_{r \rightarrow 0}(r). \quad (86)$$

Nous obtenons

$$\begin{cases} u_{2,-1}(\theta, \varphi, t) = \frac{g_2(t)}{4\pi}, \\ u_{2,0}(\theta, \varphi, t) = -\frac{\partial_t g_2(t)}{4\pi c}. \end{cases} \quad (87)$$

Ceci finalise notre développement en champ lointain à l'ordre 2.

0.4.2 Développement asymptotique en champ proche à l'ordre 2

Passons au développement en champ proche, en notant $U_{\varepsilon,2}$ le développement à l'ordre 2, nous avons

$$U_{\varepsilon,2}(\mathbf{X}, t) = U_0(\mathbf{X}, t) + U_1(\mathbf{X}, t)\varepsilon + U_2(\mathbf{X}, t)\varepsilon^2. \quad (88)$$

Nous allons à présent déterminer U_0 et U_1 , rappelons qu'ils sont tous deux des solutions sur $\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^+$ de

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \\ U_i(\mathbf{X}, 0) = 0, \quad \partial_t U_i(\mathbf{X}, 0) = 0, \\ U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \text{sur } \mathbb{S} \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (89)$$

avec \mathbb{S} la sphère unité.

Remarque 0.31. *Puisque nous nous intéressons au cas d'un obstacle sphérique de rayon ε , en passant en variables \mathbf{X} , nous obtenons la boule unité. C'est pourquoi nous mettons des conditions de bord (ici Dirichlet) sur la sphère unité.*

Un résultat de séparation de variables, voir en annexes B.1 ou [32], nous donne que U_0 et U_1 peuvent s'écrire sous la forme

$$U_i(\mathbf{X}, t) \sim \sum_{p=0}^{\infty} (R^p - R^{-1-p}) \Phi_{i,p}(\theta, \varphi, t), \quad (90)$$

avec $\Phi_{i,p}$ des fonctions dépendant de θ , φ et du temps que nous avons explicité en annexes B.1 mais que nous ne détaillerons pas ici. Remarquons que la condition de Dirichlet est bien satisfaite en $R = 1$. Comme $U_{i,p}(\theta, \varphi, t) = 0$ pour $p > i$, voir (68), nous obtenons

$$\Phi_{i,p}(\theta, \varphi, t) = 0 \quad \text{pour } p > i. \quad (91)$$

C'est à dire

$$U_0(\mathbf{X}, t) = \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi_{0,0}(\theta, \varphi, t), \quad (92)$$

et

$$U_1(\mathbf{X}, t) = \left(R - \frac{1}{R^2}\right) \Phi_{1,0}(\theta, \varphi, t) + \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi_{1,1}(\theta, \varphi, t). \quad (93)$$

Il suit

$$\begin{cases} U_{0,-1}(\theta, \varphi, t) = -\Phi_{0,0}(\theta, \varphi, t), \\ U_{0,0}(\theta, \varphi, t) = \Phi_{0,0}(\theta, \varphi, t), \end{cases} \quad (94)$$

et puisque nous voulons U_1 jusqu'à l'ordre $O_{R \rightarrow +\infty}(\frac{1}{R})$ inclus, nous avons

$$\begin{cases} U_{1,-1}(\theta, \varphi, t) = -\Phi_{1,1}(\theta, \varphi, t), \\ U_{1,0}(\theta, \varphi, t) = \Phi_{1,1}(\theta, \varphi, t), \\ U_{1,1}(\theta, \varphi, t) = \Phi_{1,0}(\theta, \varphi, t). \end{cases} \quad (95)$$

Enfin pour U_2 , rappelons que U_2 vérifie l'équation de Laplace emboîtée sur $\widehat{\Omega}$

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U_2(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} U_0(\mathbf{X}, t), \\ U_2(\mathbf{X}, 0) = 0, \quad \partial_t U_2(\mathbf{X}, 0) = 0, \\ U_2(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{S}, \quad t > 0. \end{cases} \quad (96)$$

La solution homogène $U_{2,\text{hom}}$ du problème (96) s'écrit donc sous la forme (90)

$$U_{2,\text{hom}}(\mathbf{X}, t) = \left(1 - \frac{1}{R}\right) \Phi_{2,0}(\theta, \varphi, t) + \left(R - \frac{1}{R^2}\right) \Phi_{2,1}(\theta, \varphi, t) + \left(R^2 - \frac{1}{R^3}\right) \Phi_{2,2}(\theta, \varphi, t). \quad (97)$$

Rappelons que d'après (91) les autres $\Phi_{2,p}$ sont nuls. Ensuite, il suffira de trouver une solution particulière U_2^* . Nous déduirons ainsi

$$U_2(\mathbf{X}, t) = U_2^*(\mathbf{X}, t) + U_{2,\text{hom}}(\mathbf{X}, t). \quad (98)$$

Nous avons à présent les développements en champ lointain et en champ proche à l'ordre 2. Nous pouvons passer au raccord.

0.4.3 Raccord

Rappelons les relations de raccord

$$u_{i,p}(\theta, \varphi, t) = U_{i+p,p}(\theta, \varphi, t) \quad \text{et} \quad U_{i,p}(\theta, \varphi, t) = u_{i-p,p}(\theta, \varphi, t). \quad (99)$$

Remarque 0.32. Ces relations sont indépendantes de r ou R nous n'avons donc pas à nous préoccuper des variables \mathbf{x} ou \mathbf{X} .

Nous allons commencer à raccorder. Nous connaissons u_0 , nous pouvons construire U_0 grâce à (3.7), en particulier en prenant $i = p = 0$

$$U_{0,0}(\theta, \varphi, t) = u_{0,0}(\theta, \varphi, t). \quad (100)$$

Dans la figure 12, nous mettons en bleu ce que nous connaissons à l'étape courante, ici u_0 et en rouge ce que nous cherchons à déterminer, ici U_0 . Enfin la flèche modélise la relation de raccord, c'est à dire qu'avec u_0 comme donnée nous déterminerons U_0 .



FIGURE 12 – Raccord entre u_0 et U_0

Comme $u_{0,0}(\theta, \varphi, t) = u_0(\mathbf{0}, t)$ et $U_{0,0}(\theta, \varphi, t) = \Phi_{0,0}(\theta, \varphi, t)$, il suit

$$\Phi_{0,0}(\theta, \varphi, t) = u_0(\mathbf{0}, t). \quad (101)$$

Nous en déduisons

$$U_0(\mathbf{X}, t) = \left(1 - \frac{1}{R}\right)u_0(\mathbf{0}, t). \quad (102)$$

Nous avons ainsi construit U_0 et en particulier nous avons

$$\begin{cases} U_{0,0}(\theta, \varphi, t) = u_0(\mathbf{0}, t), \\ U_{0,-1}(\theta, \varphi, t) = -u_0(\mathbf{0}, t). \end{cases} \quad (103)$$

Nous pouvons passer à la construction de u_1 , voir figure 13

$$u_{1,-1}(\theta, \varphi, t) = U_{0,-1}(\theta, \varphi, t). \quad (104)$$

A cette étape nous savons que $U_{0,-1}(\theta, \varphi, t) = -u_0(\mathbf{0}, t)$ et le développement nous avait donné



FIGURE 13 – Raccord entre U_0 et u_1

$u_{1,-1}(\theta, \varphi, t) = \frac{g_1(t)}{4\pi}$, il suit

$$g_1(t) = -4\pi u_0(\mathbf{0}, t). \quad (105)$$

Nous en déduisons

$$u_1(\mathbf{x}, t) = -\frac{u_0(\mathbf{0}, t - r/c)}{r}. \quad (106)$$

Nous avons ainsi construit u_1 et en particulier nous avons

$$\begin{cases} u_{1,-1}(\theta, \varphi, t) = -u_0(\mathbf{0}, t), \\ u_{1,0}(\theta, \varphi, t) = \frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t)}{c}, \\ u_{1,1}(\theta, \varphi, t) = -\frac{\partial_t^2 u_0(\mathbf{0}, t)}{2c^2}. \end{cases} \quad (107)$$

Nous pouvons passer à la construction de U_1 , voir la figure 14. La relation de raccord nous donne

$$U_{1,0}(\theta, \varphi, t) = u_{1,0}(\theta, \varphi, t) \quad \text{et} \quad U_{1,1}(\theta, \varphi, t) = u_{0,1}(\theta, \varphi, t). \quad (108)$$

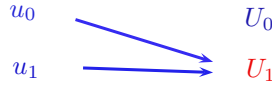


FIGURE 14 – Raccord pour déterminer U_1

Remarque 0.33. À cette étape nous avons besoin à la fois de u_0 et u_1 pour construire U_1 et nous les avons déjà déterminés précédemment.

Examinons la première relation de raccord, nous avons vu que $u_{1,0}(\theta, \varphi, t) = \frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t)}{c}$ et $U_{1,0}(\theta, \varphi, t) = \Phi_{1,1}(\theta, \varphi, t)$, il suit

$$\Phi_{1,1}(\theta, \varphi, t) = \frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t)}{c}. \quad (109)$$

Pour la deuxième relation de raccord, nous avons vu que $U_{1,1}(\theta, \varphi, t) = \Phi_{1,0}(\theta, \varphi, t)$ et $u_{0,1}(\theta, \varphi, t) = \nabla u_0(\mathbf{0}, t) \frac{\mathbf{x}}{r}$, il suit

$$\Phi_{1,0}(\theta, \varphi, t) = \nabla u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \frac{\mathbf{X}}{R}. \quad (110)$$

Remarque 0.34. Nous avons $\mathbf{x}/r = \mathbf{X}/R$, avec les éléments du champ proche nous préférons \mathbf{X}/R et pour les éléments du champ lointain \mathbf{x}/r pour plus d'homogénéité.

Ces deux relations permettent de déterminer U_1

$$U_1(\mathbf{X}, t) = (R - \frac{1}{R^2}) \nabla u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \frac{\mathbf{X}}{R} + (1 - \frac{1}{R}) \frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t)}{c}. \quad (111)$$

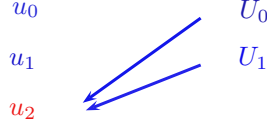
Nous en déduisons

$$\begin{cases} U_{1,-1}(\theta, \varphi, t) = -\frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t)}{c}, \\ U_{1,0}(\theta, \varphi, t) = \frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t)}{c}, \\ U_{1,1}(\theta, \varphi, t) = \nabla u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \frac{\mathbf{X}}{R}. \end{cases} \quad (112)$$

Nous pouvons passer à u_2 , voir la figure 15, le raccord donne

$$u_{2,-1}(\theta, \varphi, t) = U_{1,-1}(\theta, \varphi, t) \quad \text{et} \quad u_{2,-2}(\theta, \varphi, t) = U_{0,-2}(\theta, \varphi, t). \quad (113)$$

La première relation de raccord, avec $u_{2,-1}(\theta, \varphi, t) = \frac{g_2(t)}{4\pi}$ et $U_{1,1}(\theta, \varphi, t) = -\frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t)}{c}$ nous

FIGURE 15 – Raccord pour déterminer u_2

permet d'obtenir

$$g_2(t) = -4\pi \frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t)}{c}. \quad (114)$$

Nous pouvons alors déterminer u_2

$$u_2(\mathbf{x}, t) = \frac{g_2(t - r/c)}{4\pi r} = -\frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t - r/c)}{rc}. \quad (115)$$

Il suit

$$\begin{cases} u_{2,-1}(\theta, \varphi, t) = -\frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t)}{c}, \\ u_{2,0}(\theta, \varphi, t) = \frac{\partial_t^2 u_0(\mathbf{0}, t)}{c^2}. \end{cases} \quad (116)$$

Et enfin pour U_2 , commençons par déterminer une solution particulière, U_2^* de

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U_2(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} U_0(\mathbf{X}, t), \\ \Delta_{\mathbf{X}} U_2(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \mathbf{X} \in \mathbb{S}, \quad t > 0, \end{cases} \quad (117)$$

avec $U_0(\mathbf{X}, t) = (1 - \frac{1}{R})u_0(\mathbf{0}, t)$. Par exemple prenons

$$U_2^*(\mathbf{X}, t) = (\frac{R^2}{6} - \frac{R}{2} + \frac{1}{3}) \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t). \quad (118)$$

Nous avons alors $U_2 = U_{2,\text{hom}} + U_2^*$, il suit

$$\begin{aligned} U_2(\mathbf{X}, t) &= (1 - \frac{1}{R})\Phi_{2,0}(\theta, \varphi, t) + (R - \frac{1}{R^2})\Phi_{2,1}(\theta, \varphi, t) + (R^2 - \frac{1}{R^3})\Phi_{2,2}(\theta, \varphi, t) \\ &+ (\frac{R^2}{6} - \frac{R}{2} + \frac{1}{3}) \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t). \end{aligned}$$

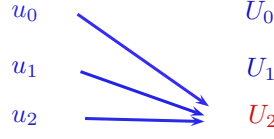
Nous en déduisons

$$\begin{cases} U_{2,0}(\theta, \varphi, t) = \Phi_{2,0}(\theta, \varphi, t) + \frac{1}{3} \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t), \\ U_{2,1}(\theta, \varphi, t) = \Phi_{2,1}(\theta, \varphi, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t), \\ U_{2,2}(\theta, \varphi, t) = \Phi_{2,2}(\theta, \varphi, t) + \frac{1}{6} \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t). \end{cases} \quad (119)$$

Nous pouvons à présent faire intervenir les relations de raccord, voir la figure 16

$$U_{2,0}(\theta, \varphi, t) = u_{2,0}(\theta, \varphi, t), \quad U_{2,1}(\theta, \varphi, t) = u_{1,1}(\theta, \varphi, t) \quad \text{et} \quad U_{2,2}(\theta, \varphi, t) = u_{0,2}(\theta, \varphi, t). \quad (120)$$

Il suit

FIGURE 16 – Raccord pour déterminer U_2

$$\begin{cases} \Phi_{2,0}(\theta, \varphi, t) = \frac{2}{3} \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t), \\ \Phi_{2,1}(\theta, \varphi, t) = 0, \\ \Phi_{2,2}(\theta, \varphi, t) = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{X}}{r} \cdot H u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \frac{\mathbf{X}}{R} - \frac{1}{6} \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t). \end{cases} \quad (121)$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} U_2(\mathbf{X}, t) &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{R}\right) \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t) + \left(R^2 - \frac{1}{R^3}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{\mathbf{X}}{R} \cdot H u_0(\mathbf{0}, t) \cdot \frac{\mathbf{X}}{R} - \frac{1}{6} \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t)\right) \\ &+ \left(\frac{R^2}{6} - \frac{R}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial_t^2}{c^2} u_0(\mathbf{0}, t). \end{aligned}$$

Conclusion

Nous avons déterminé le développement en champ lointain et en champ proche de notre solution à l'ordre 2. Pour le champ lointain nous avons

$$u_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) - \frac{u_0(\mathbf{0}, t - r/c)}{r} \varepsilon - \frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t - r/c)}{rc} \varepsilon^2 + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^3). \quad (122)$$

Le troisième terme de (122) peut être interprété comme un terme de déphasage. En effet, nous avons

$$u_0(\mathbf{0}, t + \tau - r/c) = u_0(\mathbf{0}, t - r/c) + \tau \partial_t u_0(\mathbf{0}, t - r/c) + O_{\tau \rightarrow 0}(\tau^2). \quad (123)$$

En prenant $\tau = \varepsilon/c$, il suit

$$u_0(\mathbf{0}, t + \tau - r/c) = u_0(\mathbf{0}, t - r/c) + \frac{\varepsilon}{c} \partial_t u_0(\mathbf{0}, t - r/c) + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^2). \quad (124)$$

Nous avons alors

$$u_{\varepsilon,2}^m(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) - \varepsilon \frac{u_0(\mathbf{0}, t + \tau - r/c)}{r} + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^3). \quad (125)$$

Remarque 0.35. Pour cette expression qui ne met plus en jeu de dérivée temporelle, nous parlons de modèle modifié d'ordre 2.

0.5 Plan de la thèse

La thèse est décomposée en deux parties : une partie théorique et une partie numérique. L'objectif de la première partie est de dériver un développement asymptotique à tout ordre du problème considéré et de le justifier. Pour cela, nous montrerons que les problèmes définissant les termes du développement asymptotique sont bien posés et nous donnerons une estimation d'erreur. Nous commencerons par deux chapitres d'analyse, les chapitres 1 et 2 qui regroupent l'ensemble des résultats concernant le champ lointain et le champ proche. Nous y obtiendrons des développements singuliers des termes de champ lointain au voisinage de l'origine et de champ proche au voisinage de l'infini.

Le chapitre 3 est dédié à la construction des développements asymptotiques raccordés à tout ordre. Nous y détaillerons l'algorithme permettant de définir de manière hiérarchique l'ensemble des termes du développement asymptotique. Ce chapitre repose sur l'exploitation des conditions de raccord (65). Puis, nous définirons l'erreur de raccord et montrerons que celle-ci est petite lorsque le paramètre ε tend vers 0. Dans le chapitre 4, nous obtiendrons une estimation d'erreur et nous introduirons un résultat de stabilité pour l'équation des ondes. Ceci terminera la première partie.

Dans la seconde partie, nous effectuerons une étude numérique des modèles réduits proposés précédemment. Cette partie est divisée en trois chapitres.

Le chapitre 5 présentera une méthode directe pour calculer la solution \tilde{u}_ε du problème considéré à l'aide des méthodes de Galerkin Discontinue sur un maillage raffiné. Nous construirons une solution numérique de référence. Le chapitre 6 s'intéressera à l'implémentation du modèle d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié. Dans le chapitre 7, nous proposerons une méthode à pas de temps local qui est une alternative à la méthode des développements asymptotiques raccordés.

Ces trois chapitres seront illustrés par de nombreux résultats numériques.

Première partie

Développement asymptotique raccordé pour l'équation des ondes

Chapitre 1

Éléments d'analyse pour l'étude en champ lointain de l'équation des ondes dans l'espace libre privé de l'origine

Dans ce chapitre, nous déterminerons la solution causale, respectivement anti-causale de l'équation des ondes à partir de l'étude de la solution sortante, respectivement entrante de l'équation de Helmholtz dans les sections 1.1 et 1.2. Nous donnerons ensuite une base de représentation pour les solutions régulières et singulières de l'équation des ondes dans les sections 1.3 et 1.4. Ce chapitre étant assez technique, nous répertorierons les principaux résultats de ce chapitre dans la section 1.5.

1.1 Solution causale de l'équation des ondes

Introduction

Dans ce chapitre nous cherchons à déterminer les éléments du développement en champ lointain, les fonctions $u_i : \Omega^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient

$$\begin{cases} c^2 \Delta u_0(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_0(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0 \\ c^2 \Delta u_i(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_i(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega^*, \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ces fonctions sont potentiellement singulières en l'origine. C'est pourquoi nous considérons le problème posé au sens des distributions [36] : trouver $T_\alpha \in S'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ tel que

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 T_\alpha(\mathbf{x}, t) - \Delta T_\alpha(\mathbf{x}, t) = \lambda(t) \otimes \partial_\mathbf{x}^\alpha \delta(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \text{supp}(T_\alpha) \subset \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : t \geq 0\}, \quad (1.2)$$

avec $\partial_\mathbf{x}^\alpha \delta$ la dérivée α de la fonction de Dirac δ donnée par

$$\partial_\mathbf{x}^\alpha \delta = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \frac{\partial^{\alpha_3}}{\partial x_3^{\alpha_3}} \delta \quad \text{avec} \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3. \quad (1.3)$$

Le symbole \otimes représente le produit tensoriel (voir [36] page 106) et $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ satisfait $\lambda(t) = 0$ pour $t \leq 0$.

Remarque 1.1. Nous notons T_α la solution de (1.2) pour rappeler que nous nous raisonnons au sens des distributions. Nous étudions un cas plus général.

Remarque 1.2. Bien que T_α soit une distribution nous avons préféré préciser la dépendance en espace et en temps comme nous aurions pu le faire pour une fonction. Ceci nous éloigne des notations classiques mais permet de mieux rappeler les dépendances des distributions.

Une solution causale de (1.2) peut être déterminée par la théorie de la convolution des distributions

$$T_\alpha^-(\mathbf{x}, t) = G^-(\mathbf{x}, t) * (\lambda(t) \otimes \partial_\mathbf{x}^\alpha \delta(\mathbf{x})), \quad (1.4)$$

où G^- est la solution fondamentale causale de l'équation des ondes, voir en annexes A

$$G^-(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta_{t-r/c}}{4\pi r}, \quad \text{avec } r = |\mathbf{x}|. \quad (1.5)$$

Pour $t^- = t - r/c$, nous parlons de temps retardé.

Remarque 1.3. La formule (1.5) est ambiguë. Elle doit être prise au sens des distributions comme suit

$$\langle G^-(\mathbf{x}, t); \Psi(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi_\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

avec $\varphi_\psi(\mathbf{x}) = \frac{\psi(\mathbf{x}, \frac{r}{c})}{4\pi r}$ et $r = |\mathbf{x}|$.

Proposition 1.1. Pour $\alpha = \mathbf{0}$, la solution causale T_0^- de (1.2) peut être explicitée

$$T_0^-(\mathbf{x}, t) = \frac{\lambda(t^-)}{4\pi r} \quad \text{avec } t^- = t - r/c. \quad (1.6)$$

Preuve. Afin d'évaluer (1.4), rappelons la définition de la convolution au sens des distributions, voir [36] : pour tout $g, h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ et $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$, nous avons

$$\langle h(\mathbf{x}, t) * g(\mathbf{x}, t), \Psi(\mathbf{x}, t) \rangle = \langle h(\mathbf{x}, t); \langle g(\mathbf{y}, s); \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \rangle_{(\mathbf{y}, s)} \rangle_{(\mathbf{x}, t)}. \quad (1.7)$$

En remplaçant $h(\mathbf{x}, t)$ par $G^-(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ par $\lambda(t) \otimes \delta(\mathbf{x})$ dans (1.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle T_0^-(\mathbf{x}, t); \Psi(\mathbf{x}, t) \rangle &= \langle G^-(\mathbf{x}, t) * (\lambda(t) \otimes \delta(\mathbf{x})); \Psi(\mathbf{x}, t) \rangle \\ &= \langle G^-(\mathbf{x}, t); \langle \lambda(s) \otimes \delta(\mathbf{y}); \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \rangle_{(\mathbf{y}, s)} \rangle_{(\mathbf{x}, t)}. \end{aligned}$$

Nous commençons par évaluer le produit de dualité intérieur

$$\langle \lambda(s) \otimes \delta(\mathbf{y}); \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \rangle_{(\mathbf{y}, s)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(s) \Psi(\mathbf{x}, t + s) ds \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}).$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \langle T_0^-(\mathbf{x}, t); \Psi(\mathbf{x}, t) \rangle &= \langle G^-(\mathbf{x}, t); \langle \lambda(s) \otimes \delta(\mathbf{y}); \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \rangle_{(\mathbf{y}, s)} \rangle_{(\mathbf{x}, t)} \\ &= \left\langle \frac{\delta_{t-\frac{r}{c}}}{4\pi r}; \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(s) \Psi(\mathbf{x}, t + s) ds \right\rangle_{(\mathbf{x}, t)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(s) \Psi(\mathbf{x}, \frac{r}{c} + s) ds}{4\pi r} d\sigma_\mathbf{x} dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(s - \frac{r}{c})}{4\pi r} \Psi(\mathbf{x}, s) ds d\sigma_\mathbf{x} dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\lambda(t - \frac{r}{c})}{4\pi r} \Psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) dt. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est bien licite car la fonction $(\mathbf{x}, t) \mapsto \frac{\lambda(t - \frac{r}{c})}{4\pi r}$ est $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Par conséquent, au sens des distributions nous avons

$$T_{\mathbf{0}}^-(\mathbf{x}, t) = \frac{\lambda(t - \frac{r}{c})}{4\pi r}. \quad (1.8)$$

□

Cependant, pour $\alpha \neq \mathbf{0}$, l'expression (1.4) peut être obtenue en différenciant (1.6) au sens des distributions. Pour $|\alpha| \leq 3$, nous explicitons les T_{α}^- (nous ne détaillons pas ces calculs car ils seront obtenus par une autre méthode par la suite). Nous notons $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

$$T_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{x}, t) = - \left(\frac{\lambda'(t^-)}{4\pi r c} + \frac{\lambda(t^-)}{4\pi r^2} \right) \frac{x_i}{r}, \quad (1.9)$$

$$T_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j} = \left(\frac{\lambda''(t^-)}{4\pi r c^2} + 3 \frac{\lambda'(t^-)}{4\pi r^2 c} + 3 \frac{\lambda(t^-)}{4\pi r^3} \right) \frac{x_i x_j}{r^2}, \quad (1.10)$$

$$T_{2\mathbf{e}_i}(\mathbf{x}, t) = - \frac{\lambda(t) \otimes \delta}{3} + \left(\frac{\lambda''(t^-)}{4\pi r c^2} + 3 \frac{\lambda'(t^-)}{4\pi r^2 c} + 3 \frac{\lambda(t^-)}{4\pi r^3} \right) \left(\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{1}{3} \right) + \frac{\lambda''(t^-)}{12\pi r c^2}, \quad (1.11)$$

$$T_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_k}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\lambda^{(3)}(t^-)}{4\pi r c^3} + 6 \frac{\lambda''(t^-)}{4\pi r^2 c^2} + 15 \frac{\lambda'(t^-)}{4\pi r^3 c} + 15 \frac{\lambda(t^-)}{4\pi r^4} \right) \frac{-x_1 x_2 x_3}{r^3}, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_j}(\mathbf{x}, t) = & - \frac{\lambda(t) \otimes \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i} \delta}{5} - \frac{x_i}{r} \left[\frac{\lambda^{(3)}(t^-)}{20\pi r c^3} + \frac{\lambda''(t^-)}{20\pi r^2 c^2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\lambda^{(3)}(t^-)}{4\pi r c^3} + 6 \frac{\lambda''(t^-)}{4\pi r^2 c^2} + 15 \frac{\lambda'(t^-)}{4\pi r^3 c} + 15 \frac{\lambda(t^-)}{4\pi r^4} \right) \left(\frac{x_j^2}{r^2} - \frac{1}{5} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} T_{3\mathbf{e}_i}(\mathbf{x}, t) = & - \frac{3\lambda(t) \otimes \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i} \delta}{5} - \frac{x_i}{r} \left[\frac{3\lambda^{(3)}(t^-)}{20\pi r c^3} + \frac{3\lambda''(t^-)}{20\pi r^2 c^2} + \right. \\ & \left. \left(\frac{\lambda^{(3)}(t^-)}{4\pi r c^3} + 6 \frac{\lambda''(t^-)}{4\pi r^2 c^2} + 15 \frac{\lambda'(t^-)}{4\pi r^3 c} + 15 \frac{\lambda(t^-)}{4\pi r^4} \right) \left(\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{3}{5} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Par contre, pour $|\alpha|$ grand, les calculs deviennent vite insurmontables. L'approche adoptée dans cette partie permet d'expliciter la formule (1.4) en utilisant une transformée de Fourier temporelle et la méthode des multipôles en régime fréquentiel [27]. Rappelons que la transformée de Fourier temporelle de la distribution T est définie par dualité

$$\langle \widehat{T}, v \rangle = \langle T, \widehat{v} \rangle, \quad \forall v \in S(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}), \quad (1.15)$$

où \widehat{v} est la transformée de Fourier temporelle de $v \in S(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ donnée par

$$\widehat{v}(\mathbf{x}, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\mathbf{x}, t) \exp(iktc) dt, \quad (1.16)$$

avec k le nombre d'onde. Nous notons $\widehat{T}_{\alpha} \in S'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ la transformée de Fourier de $T_{\alpha} \in S'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$. La distribution \widehat{T}_{α} est donnée par $\widehat{T}_{\alpha}(\mathbf{x}, k) = \widehat{\lambda}(k) \widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}(\mathbf{x}, k)$ avec $\widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}$ une solution de l'équation de Helmholtz singulière

$$-\Delta \widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}(\mathbf{x}, k) - k^2 \widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}(\mathbf{x}, k) = \partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \delta(\mathbf{x}). \quad (1.17)$$

Cette partie est organisée comme suit. Dans un premier temps, nous travaillons en domaine fréquentiel. Nous commençons par rappeler brièvement la théorie des multipôles pour déterminer la solution sortante de l'équation de Helmholtz dans la section 1.1.1. Ensuite, nous explicitons les multipôles en domaine fréquentiel en section 1.1.2. Pour terminer l'étude en domaine fréquentiel, nous détaillons l'obtention des parties singulières pour les premiers multipôles en section 1.1.3. Dans un deuxième temps, section 1.1.4, nous passons en domaine temporel par le biais d'une transformée de Fourier inverse et nous déterminons la solution causale de l'équation des ondes. Enfin, en section 1.1.5, nous concluons en explicitant les multipôles en domaine temporel d'ordre inférieur ou égal à trois.

1.1.1 Solution sortante de l'équation de Helmholtz

Commençons par résumer quelques résultats de la théorie des multipôles pour l'équation de Helmholtz qui peuvent être trouvés par exemple dans [27]. Une solution sortante de l'équation de Helmholtz : $\Delta \widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, k) + k^2 \widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, k) = -\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \delta$, peut être décomposée en une somme d'une distribution $\widehat{\mathbf{S}}_{\alpha}$ de support $\{\mathbf{0}\}$ (une somme finie de fonctions de Dirac) et d'une fonction singulière $\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, k)$ appelée multipôle

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, k) = \widehat{\mathbf{S}}_{\alpha}(\mathbf{x}, k) + \widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, k). \quad (1.18)$$

Le multipôle $\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, k) = \widehat{\mathbf{P}}_{\alpha}(\mathbf{x}, k) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}$ est le produit de la fonction de Green fréquentielle et d'un polynôme $\widehat{\mathbf{P}}_{\alpha} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de variable $(-ik)$ dont les coefficients sont des fonctions singulières en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Plus précisément, nous avons

$$\widehat{\mathbf{P}}_{\alpha}(\mathbf{x}, k) = (-ik)^{|\alpha|} \sum_{n=0}^{|\alpha|} \sum_{m=0}^n q_n(-ikr) \left((\mathbf{A}_{\alpha})_n^m \cos_n^m(\theta, \varphi) + (\mathbf{B}_{\alpha})_n^m \sin_n^m(\theta, \varphi) \right) \quad (1.19)$$

avec (r, θ, φ) les coordonnées sphériques

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \varphi \quad \text{et} \quad x_3 = r \cos \theta. \quad (1.20)$$

Les fonctions q_n sont des polynômes de degré n de la variable complexe $\frac{1}{z}$

$$q_n(z) = i^{n+1} \frac{iz h_n^{(1)}(iz)}{\exp(-z)} = \sum_{\ell=0}^n q_n^{\ell} z^{-\ell}, \quad \text{avec} \quad q_n^{\ell} = \frac{(n+\ell)!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{1}{2^{\ell}}. \quad (1.21)$$

Dans (1.21), nous avons noté $h_n^{(1)}$ la fonction de Hankel sphérique du premier ordre, comme dans [27] page 56 et dans [22] page 264. De plus, les fonctions \cos_n^m et \sin_n^m sont définies sur la sphère unité comme suit

$$\begin{cases} \cos_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \cos(m\varphi), \\ \sin_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \sin(m\varphi). \end{cases} \quad (1.22)$$

L'expression (1.22) contient la fonction de Legendre associée P_n^m d'ordre entier m et degré n , voir [27] page 47, [22] page 353, définie par

$$P_n^m(\mu) = \frac{(-1)^m}{2^m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!m!} (1-\mu^2)^{m/2} \times \sum_{\ell=0}^{n-m} \frac{(-1)^{\ell} (n-m-\ell+1)_{\ell} (n+m+1)_{\ell}}{2^{\ell} \ell! (m+1)_{\ell}} (1-\mu)^{\ell}, \quad (1.23)$$

où $(n)_\ell$ est le symbole de Pochhammer

$$(n)_\ell = \frac{(n + \ell - 1)!}{(n - 1)!}. \quad (1.24)$$

Les premières fonctions angulaires sphériques sont explicitées dans le tableau 1.1.

n	m	$q_n(z)$	$P_n^m(\cos \theta)$	$\cos_n^m(\theta, \varphi)$	$\sin_n^m(\theta, \varphi)$
0	0	1	1	1	0
1	0	$1 + 1/z$	$\cos \theta$	$\frac{x_3}{r}$	0
	1		$-\sin \theta$	$-\frac{x_1}{r}$	$-\frac{x_2}{r}$
2	0	$1 + \frac{3}{z} + \frac{3}{z^2}$	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$	$\frac{1}{2} \left(3 \frac{x_3^2}{r^2} - 1 \right)$	0
	1		$-3 \cos \theta \sin \theta$	$-3 \frac{x_1 x_3}{r^2}$	$-3 \frac{x_2 x_3}{r^2}$
	2		$3 \sin^2 \theta$	$3 \left(\frac{x_1^2}{r^2} - \frac{x_2^2}{r^2} \right)$	$6 \frac{x_1 x_2}{r^2}$
3	0	$1 + \frac{6}{z} + \frac{15}{z^2} + \frac{15}{z^3}$	$\frac{\cos \theta}{2} (5 \cos^2 \theta - 3)$	$\frac{x_3}{2r} \left(5 \frac{x_3^2}{r^2} - 3 \right)$	0
	1		$\frac{3}{2} \sin \theta (1 - 5 \cos^2 \theta)$	$\frac{3}{2} \frac{x_1}{r} \left(1 - 5 \frac{x_3^2}{r^2} \right)$	$\frac{3}{2} \frac{x_2}{r} \left(1 - 5 \frac{x_3^2}{r^2} \right)$
	2		$15 \sin^2 \theta \cos \theta$	$15 \frac{x_3}{r} \left(\frac{x_1^2}{r^2} - \frac{x_2^2}{r^2} \right)$	$30 \frac{x_1 x_2 x_3}{r^3}$
	3		$-15 \sin^3 \theta$	$15 \frac{x_1}{r} \left(3 - 3 \frac{x_3^2}{r^2} - 4 \frac{x_1^2}{r^2} \right)$	$15 \frac{x_2}{r} \left(-3 + 3 \frac{x_3^2}{r^2} + 4 \frac{x_2^2}{r^2} \right)$

Tableau 1.1 – Les premiers q_n , P_n^m , \cos_n^m et \sin_n^m

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^3$, $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$, les réels $(\mathbf{A}_\alpha)_n^m$ et $(\mathbf{B}_\alpha)_n^m$ sont indépendants de k et sont explicitement donnés par la formule

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_\alpha)_n^m = \left[(\mathbb{A}_\alpha)_n^m + (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (\mathbb{A}_\alpha)_n^{-m} \right] (2n+1), & m > 0 \\ (\mathbf{B}_\alpha)_n^m = \left[(\mathbb{B}_\alpha)_n^m - (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} (\mathbb{B}_\alpha)_n^{-m} \right] (2n+1), & m > 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

excepté pour $m = 0$ où

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_\alpha)_n^0 = (\mathbb{A}_\alpha)_n^0 \\ (\mathbf{B}_\alpha)_n^0 = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

et pour $m > n$ où $(\mathbf{A}_\alpha)_n^m = (\mathbf{B}_\alpha)_n^m = 0$.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^3$, $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{Z}$ avec $-n \leq m \leq n$, les coefficients $(\mathbf{A}_\alpha)_n^m$ et $(\mathbf{B}_\alpha)_n^m$ peuvent être

calculés récursivement grâce aux formules

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (\mathbb{A}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m & = & [(\mathbb{A}_{\alpha})_{n-1}^{m-1} - (\mathbb{A}_{\alpha})_{n+1}^{m-1} - a_{n-1}^{m+1}(\mathbb{A}_{\alpha})_{n-1}^{m+1} + b_{n+1}^{m+1}(\mathbb{A}_{\alpha})_{n+1}^{m+1}] \frac{1}{2(2n+1)}, \\ (\mathbb{B}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m & = & [(\mathbb{B}_{\alpha})_{n-1}^{m-1} - (\mathbb{B}_{\alpha})_{n+1}^{m-1} - a_{n-1}^{m+1}(\mathbb{B}_{\alpha})_{n-1}^{m+1} + b_{n+1}^{m+1}(\mathbb{B}_{\alpha})_{n+1}^{m+1}] \frac{1}{2(2n+1)}, \\ (\mathbb{A}_{\alpha+\mathbf{e}_2})_n^m & = & [-(\mathbb{B}_{\alpha})_{n-1}^{m-1} + (\mathbb{B}_{\alpha})_{n+1}^{m-1} - a_{n-1}^{m+1}(\mathbb{B}_{\alpha})_{n-1}^{m+1} + b_{n+1}^{m+1}(\mathbb{B}_{\alpha})_{n+1}^{m+1}] \frac{1}{2(2n+1)}, \\ (\mathbb{B}_{\alpha+\mathbf{e}_2})_n^m & = & [(\mathbb{A}_{\alpha})_{n-1}^{m-1} - (\mathbb{A}_{\alpha})_{n+1}^{m-1} + a_{n-1}^{m+1}(\mathbb{A}_{\alpha})_{n-1}^{m+1} - b_{n+1}^{m+1}(\mathbb{A}_{\alpha})_{n+1}^{m+1}] \frac{1}{2(2n+1)}, \\ (\mathbb{A}_{\alpha+\mathbf{e}_3})_n^m & = & [-c_{n-1}^m(\mathbb{A}_{\alpha})_{n-1}^m - d_{n+1}^m(\mathbb{A}_{\alpha})_{n+1}^m] \frac{1}{2n+1}, \\ (\mathbb{B}_{\alpha+\mathbf{e}_3})_n^m & = & [-c_{n-1}^m(\mathbb{B}_{\alpha})_{n-1}^m - d_{n+1}^m(\mathbb{B}_{\alpha})_{n+1}^m] \frac{1}{2n+1}, \\ c_n^m & = & n - m + 1, \quad a_n^m = (n - m + 2)c_n^m \quad \text{et} \quad d_n^m = n + m, \quad b_n^m = (n + m - 1)d_n^m, \end{array} \right. \quad (1.27)$$

avec $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Pour $|m| > n$, nous avons

$$(\mathbb{A}_{\alpha})_n^m = (\mathbb{B}_{\alpha})_n^m = 0. \quad (1.28)$$

L'initialisation de cette formule par récurrence est donnée par

$$(\mathbb{A}_{\mathbf{0}})_n^m = 0 \text{ et } (\mathbb{B}_{\mathbf{0}})_n^m = 0 \text{ sauf pour } m = n = 0 \text{ où } (\mathbb{A}_{\mathbf{0}})_0^0 = 1 \text{ et } (\mathbb{B}_{\mathbf{0}})_0^0 = 0. \quad (1.29)$$

Remarque 1.4. La formule de récurrence (1.27) est nouvelle dans le sens où elle est simplifiée comparée à des formules de récurrence existantes, voir par exemple [27] page 48, 49, 67, 68, 69, 72 où les entiers relatifs m positifs ou négatifs doivent être différenciés.

Dans ce qui suit nous allons montrer comment nous obtenons ces formules de récurrence. Pour cela nous avons besoin de prérequis. Nous commençons par introduire les familles de fonctions suivantes définies pour m et n vérifiant $0 \leq m \leq n$:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_n^m(\mathbf{x}) = q_n(-ikr) \cos_n^m(\theta, \varphi) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, & S_n^m(\mathbf{x}) = q_n(-ikr) \sin_n^m(\theta, \varphi) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \\ C_n^{-m}(\mathbf{x}) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} C_n^m(\mathbf{x}), & S_n^{-m}(\mathbf{x}) = -(-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} S_n^m(\mathbf{x}). \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Pour $m > n$, nous posons la convention de nullité

$$C_n^m(\mathbf{x}) = C_n^{-m}(\mathbf{x}) = S_n^m(\mathbf{x}) = S_n^{-m}(\mathbf{x}) \equiv 0. \quad (1.31)$$

Lemme 1.1. Les dérivées suivant \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 des fonctions C_n^m et S_n^m sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{x_1} C_n^m = \frac{-ik}{2(2n+1)} (b_n^m C_{n-1}^{m-1} - a_n^m C_{n+1}^{m-1} - C_{n-1}^{m+1} + C_{n+1}^{m+1}) \\ \partial_{x_1} S_n^m = \frac{-ik}{2(2n+1)} (b_n^m S_{n-1}^{m-1} - a_n^m S_{n+1}^{m-1} - S_{n-1}^{m+1} + S_{n+1}^{m+1}), \end{array} \right. \quad (1.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{x_2} C_n^m = \frac{-ik}{2(2n+1)} (-b_n^m S_{n-1}^{m-1} + a_n^m S_{n+1}^{m-1} - S_{n-1}^{m+1} + S_{n+1}^{m+1}) \\ \partial_{x_2} S_n^m = \frac{-ik}{2(2n+1)} (b_n^m C_{n-1}^{m-1} - a_n^m C_{n+1}^{m-1} + C_{n-1}^{m+1} - C_{n+1}^{m+1}), \end{array} \right. \quad (1.33)$$

$$\begin{cases} \partial_{x_3} C_n^m = \frac{-ik}{2n+1} (-d_n^m C_{n-1}^m - c_n^m C_{n+1}^m) \\ \partial_{x_3} S_n^m = \frac{-ik}{2n+1} (-d_n^m S_{n-1}^m - c_n^m S_{n+1}^m). \end{cases} \quad (1.34)$$

Preuve du lemme 1.1 . Nous donnons seulement la preuve de la première ligne de (1.32). D'après [27] page 66, nous avons

$$\partial_{x_1} = (r\partial_r - \mu\partial_\mu) \frac{\cos \varphi \sqrt{1-\mu^2}}{r} - \partial_\varphi \frac{\sin \varphi}{r\sqrt{1-\mu^2}}, \quad (1.35)$$

avec $\mu = \cos \theta$. Il suit que $\partial_{x_1} C_n^m$ est donné par

$$\begin{cases} \partial_{x_1} C_n^m(\mathbf{x}) = \cos(m\varphi) \cos(\varphi) \partial_r \left(q_n(-ikr) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \right) (\sqrt{1-\mu^2} P_n^m(\mu)) \\ - \cos(m\varphi) \cos(\varphi) \left(q_n(-ikr) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r^2} \right) (\mu \sqrt{1-\mu^2} \partial_\mu P_n^m(\mu)) \\ + \sin(m\varphi) \sin(\varphi) \left(q_n(-ikr) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r^2} \right) \left(m \frac{P_n^m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \right). \end{cases} \quad (1.36)$$

Nous déduisons des formules de Simpson

$$\begin{cases} \cos \varphi \cos m\varphi = \frac{\cos((m+1)\varphi)}{2} + \frac{\cos((m-1)\varphi)}{2} \\ \sin \varphi \sin m\varphi = \frac{\cos((m-1)\varphi)}{2} - \frac{\cos((m+1)\varphi)}{2} \end{cases} \quad (1.37)$$

que

$$\begin{cases} \partial_{x_1} C_n^m(\mathbf{x}) = \left(\frac{\cos((m+1)\varphi)}{2} + \frac{\cos((m-1)\varphi)}{2} \right) \partial_r \left(q_n(-ikr) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \right) (\sqrt{1-\mu^2} P_n^m(\mu)) \\ + \frac{\cos((m-1)\varphi)}{2} \left(q_n(-ikr) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r^2} \right) \left(-\mu \sqrt{1-\mu^2} \partial_\mu P_n^m(\mu) + m \frac{P_n^m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \right) \\ + \frac{\cos((m+1)\varphi)}{2} \left(q_n(-ikr) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r^2} \right) \left(-\mu \sqrt{1-\mu^2} \partial_\mu P_n^m(\mu) - m \frac{P_n^m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \right), \end{cases} \quad (1.38)$$

Nous simplifions cette expression en

$$\begin{aligned} \partial_{x_1} C_n^m(\mathbf{x}) &= (-ik) \frac{\cos(m+1)\varphi}{2} \left(\frac{P_{n+1}^{m+1}(\mu)}{2n+1} q_{n+1}(-ikr) - \frac{P_{n-1}^{m+1}(\mu)}{2n+1} q_{n-1}(-ikr) \right) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \\ &+ (-ik) \frac{\cos(m-1)\varphi}{2} \left(-\frac{a_n^m P_{n+1}^{m-1}(\mu)}{2n+1} q_{n+1}(-ikr) + \frac{b_n^m P_{n-1}^{m-1}(\mu)}{2n+1} q_{n-1}(-ikr) \right) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \end{aligned}$$

grâce aux relations de récurrence portant sur :

– les fonctions q_n

$$\begin{cases} \partial_r (q_n(-ikr) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}) = \frac{ik}{2n+1} (nq_{n-1}(-ikr) + (n+1)q_{n+1}(-ikr)) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \\ q_n(-ikr) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r^2} = \frac{ik}{2n+1} (q_{n-1}(-ikr) - q_{n+1}(-ikr)) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \end{cases} \quad (1.39)$$

qui se déduisent de (1.21) et des propriétés suivantes des fonctions de Hankle, voir [27] page 55

$$\frac{dh_n^{(1)}}{dz}(z) = \frac{nh_{n-1}^{(1)}(z) - (n+1)h_{n+1}^{(1)}(z)}{2n+1} \quad \text{et} \quad h_n^{(1)}(z) = z \frac{h_{n-1}^{(1)}(z) + h_{n+1}^{(1)}(z)}{2n+1}. \quad (1.40)$$

– les fonctions de Legendre associées, voir [27] pages 48 et 49, qui vérifient pour $n \geq 0$ et $-n \leq m \leq n$

$$\begin{cases} \sqrt{1-\mu^2}P_n^m(\mu) &= \frac{P_{n-1}^{m+1}(\mu)}{2n+1} - \frac{P_{n+1}^{m+1}(\mu)}{2n+1}, \\ &= -\frac{b_n^m}{2n+1}P_{n-1}^{m-1}(\mu) + \frac{a_n^m}{2n+1}P_{n+1}^{m-1}(\mu), \end{cases} \quad (1.41)$$

$$\begin{cases} -\mu\sqrt{1-\mu^2}\partial_\mu P_n^m(\mu) - \frac{mP_n^m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} &= \frac{n+1}{2n+1}P_{n-1}^{m+1}(\mu) + \frac{n}{2n+1}P_{n+1}^{m+1}(\mu), \\ -\mu\sqrt{1-\mu^2}\partial_\mu P_n^m(\mu) + \frac{mP_n^m(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} &= -\frac{(n+1)b_n^m}{2n+1}P_{n-1}^{m-1}(\mu) - \frac{na_n^m}{2n+1}P_{n+1}^{m-1}(\mu), \end{cases} \quad (1.42)$$

avec la convention de nullité $P_n^m \equiv 0$ pour $|m| > n$ et la convention de parité

$$P_n^{-m}(\mu) = (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu). \quad (1.43)$$

Ceci termine la preuve. \square

Remarque 1.5. La relation (1.43) diffère de la définition classique des P_n^m mais permet de simplifier les relations de récurrence existantes.

Preuve des formules de récurrence. Nous allons commencer par expliciter l'obtention des $(\mathbb{A}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m$ et des $(\mathbb{B}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m$ en dérivant $\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^-$ par rapport à \mathbf{e}_1 et en identifiant à $\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha+\mathbf{e}_1}^-$. En effet, nous avons

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{M}}_{\alpha+\mathbf{e}_1}^-(\mathbf{x}, k) = (-ik)^{|\alpha|+1} \sum_{n=0}^{|\alpha|+1} \sum_{m=0}^n q_n(-ikr) \left((\mathbf{A}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m \cos_n^m(\theta, \varphi) + (\mathbf{B}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m \sin_n^m(\theta, \varphi) \right) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \\ \widehat{\mathbf{M}}_{\alpha+\mathbf{e}_1}^-(\mathbf{x}, k) = \partial_{x_1}(\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^-(\mathbf{x}, k)). \end{cases} \quad (1.44)$$

Développons la deuxième ligne de (1.44), il suit

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}(\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^-(\mathbf{x}, k)) &= \partial_{x_1}((-ik)^{|\alpha|} \sum_{n=0}^{|\alpha|} \sum_{m=0}^n q_n(-ikr) \left((\mathbf{A}_{\alpha})_n^m \cos_n^m(\theta, \varphi) + (\mathbf{B}_{\alpha})_n^m \sin_n^m(\theta, \varphi) \right) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}) \\ &= (-ik)^{|\alpha|} \sum_{n=0}^{|\alpha|} \sum_{m=0}^n \left((\mathbf{A}_{\alpha})_n^m \partial_{x_1} C_n^m + (\mathbf{B}_{\alpha})_n^m \partial_{x_1} S_n^m \right) \\ &= (-ik)^{|\alpha|+1} \sum_{n=0}^{|\alpha|} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2(2n+1)} \left((\mathbf{A}_{\alpha})_n^m (b_n^m C_{n-1}^{m-1} - a_n^m C_{n+1}^{m-1} - C_{n-1}^{m+1} + C_{n+1}^{m+1}) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{B}_{\alpha})_n^m (b_n^m S_{n-1}^{m-1} - a_n^m S_{n+1}^{m-1} - S_{n-1}^{m+1} + S_{n+1}^{m+1}) \right). \end{aligned}$$

Notons

$$A_{\alpha,n}^m = \frac{(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m}{2n+1} \quad \text{et} \quad B_{\alpha,n}^m = \frac{(\mathbf{B}_{\alpha})_n^m}{2n+1}. \quad (1.45)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}(\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, k)) &= (-ik)^{|\alpha|+1} \sum_{n=0}^{|\alpha|+1} \sum_{m=0}^n \frac{1}{2} \left(b_{n+1}^{m+1} A_{\alpha, n+1}^{m+1} - a_{n-1}^{m+1} A_{\alpha, n-1}^{m+1} - A_{\alpha, n+1}^{m-1} + A_{\alpha, n-1}^{m-1} \right) C_n^m \\ &+ \frac{1}{2} \left(b_{n+1}^{m+1} B_{\alpha, n+1}^{m+1} - a_{n-1}^{m+1} B_{\alpha, n-1}^{m+1} - B_{\alpha, n+1}^{m-1} + B_{\alpha, n-1}^{m-1} \right) S_n^m. \end{aligned}$$

En identifiant avec $\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha+\mathbf{e}_1}^{-}(\mathbf{x}, k) = (-ik)^{|\alpha|+1} \sum_{n=0}^{|\alpha|+1} \sum_{m=0}^n (\mathbf{A}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m C_n^m(\theta, \varphi) + (\mathbf{B}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m S_n^m$ nous avons

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m = \frac{1}{2(2n+1)} (b_{n+1}^{m+1} (\mathbf{A}_{\alpha})_{n+1}^{m+1} - a_{n-1}^{m+1} (\mathbf{A}_{\alpha})_{n-1}^{m+1} - (\mathbf{A}_{\alpha})_{n+1}^{m-1} + (\mathbf{A}_{\alpha})_{n-1}^{m-1}), \\ (\mathbf{B}_{\alpha+\mathbf{e}_1})_n^m = \frac{1}{2(2n+1)} (b_{n+1}^{m+1} (\mathbf{B}_{\alpha})_{n+1}^{m+1} - a_{n-1}^{m+1} (\mathbf{B}_{\alpha})_{n-1}^{m+1} - (\mathbf{B}_{\alpha})_{n+1}^{m-1} + (\mathbf{B}_{\alpha})_{n-1}^{m-1}). \end{cases} \quad (1.46)$$

Ceci achève la preuve en remplaçant $(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m$ et $(\mathbf{B}_{\alpha})_n^m$ par leur définition, voir (1.25). \square

Appliquons cet algorithme aux premiers α , nous obtenons la proposition

Proposition 1.2. *Pour $|\alpha| \leq 3$, tous les $(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m$ et $(\mathbf{B}_{\alpha})_n^m$ non nuls sont répertoriés dans le tableau 1.2.*

α	$(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m$ et $(\mathbf{B}_{\alpha})_n^m$ non nuls
$\mathbf{0}$	$(\mathbf{A}_{\mathbf{0}})_0^0 = 1$
\mathbf{e}_i	$(\mathbf{A}_{\mathbf{e}_1})_1^1 = 1, \quad (\mathbf{B}_{\mathbf{e}_2})_1^1 = 1, \quad (\mathbf{A}_{\mathbf{e}_3})_1^0 = -1$
$2\mathbf{e}_i$	$(\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_1})_0^0 = 1/3, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_1})_2^2 = 1/6, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_1})_2^0 = -1/3, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_2})_0^0 = 1/3$ $(\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_2})_2^2 = -1/6, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_2})_2^0 = -1/3, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_3})_0^0 = 1/3, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_3})_2^0 = 2/3$
$\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$	$(\mathbf{B}_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2})_2^2 = 1/6, \quad (\mathbf{A}_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3})_2^1 = -1/3, \quad (\mathbf{B}_{\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3})_2^1 = -1/3$
$3\mathbf{e}_i$	$(\mathbf{A}_{3\mathbf{e}_1})_1^1 = 3/5, \quad (\mathbf{A}_{3\mathbf{e}_1})_3^1 = -1/10, \quad (\mathbf{A}_{3\mathbf{e}_1})_3^3 = 1/60, \quad (\mathbf{A}_{3\mathbf{e}_2})_1^1 = 3/5$ $(\mathbf{A}_{3\mathbf{e}_2})_3^1 = -1/10, \quad (\mathbf{A}_{3\mathbf{e}_2})_3^3 = -1/60, \quad (\mathbf{A}_{3\mathbf{e}_3})_1^0 = -3/5, \quad (\mathbf{A}_{3\mathbf{e}_3})_3^0 = -1/5$
$2\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$	$(\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3})_1^0 = -1/5, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3})_3^0 = 1/5, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3})_3^2 = -1/30, \quad (\mathbf{B}_{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2})_1^1 = 1/5$ $(\mathbf{B}_{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2})_3^1 = -1/30, \quad (\mathbf{B}_{2\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2})_3^3 = 1/60, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1})_1^1 = 1/5, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1})_3^1 = -1/30$ $(\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_1})_3^3 = -1/60, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3})_1^0 = -1/5, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3})_3^0 = 1/5, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3})_3^2 = 1/30$ $(\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_1})_1^1 = 1/5, \quad (\mathbf{A}_{2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_1})_3^1 = 2/15, \quad (\mathbf{B}_{2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2})_1^1 = 1/5, \quad (\mathbf{B}_{2\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_2})_3^1 = 2/15$
$\sum \mathbf{e}_i$	$(\mathbf{B}_{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3})_3^2 = -1/30$

Tableau 1.2 – $(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m$ et $(\mathbf{B}_{\alpha})_n^m$ non nuls pour $|\alpha| \leq 3$

Remarque 1.6. *Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ nous avons*

$$(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m = 0, \quad \text{pour } \alpha_2 \text{ impair}; \quad (\mathbf{B}_{\alpha})_n^m = 0, \quad \text{pour } \alpha_2 \text{ pair}. \quad (1.47)$$

Remarque 1.7. Si $|\alpha|$ est pair alors $(\mathbf{A}_\alpha)_n^m = (\mathbf{B}_\alpha)_n^m = 0$ pour tout n impair et si $|\alpha|$ est impair alors $(\mathbf{A}_\alpha)_n^m = (\mathbf{B}_\alpha)_n^m = 0$ pour tout n pair.

1.1.2 Les premiers multipôles en domaine fréquentiel

Dans l'équation (1.19), nous avons donné une formule explicite pour obtenir les multipôles en domaine fréquentiel. Cette formule peut être simplifiée pour les premiers multipôles et exprimée en coordonnées cartésiennes. Pour $|\alpha| \leq 3$, nous collectons ces résultats dans le tableau 1.3.

α	$\widehat{\mathbf{P}}_\alpha(\mathbf{x}, k)$	$\widehat{\mathbf{S}}_\alpha$
0	1	0
\mathbf{e}_i	$-\left(-ik + \frac{1}{r}\right) \frac{x_i}{r}$	0
$\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$	$\left((ik)^2 - 3\frac{ik}{r} + \frac{3}{r^2}\right) \frac{x_i x_j}{r^2}$	0
$2\mathbf{e}_i$	$\left((ik)^2 - \frac{3ik}{r} + \frac{3}{r^2}\right) \left(\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{(ik)^2}{3}$	$-\frac{\delta}{3}$
$\sum \mathbf{e}_i$	$(-ik)^3 q_3(-ikr) \frac{-x_1 x_2 x_3}{r^3}$	0
$\mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_j$	$-\frac{x_i}{r}(-ik)^3 \left[\frac{1}{5} q_1(-ikr) + q_3(-ikr) \left(\frac{x_j^2}{r^2} - \frac{1}{5} \right) \right]$	$-\frac{\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i} \delta}{5}$
$3\mathbf{e}_i$	$-\frac{x_i}{r}(-ik)^3 \left[\frac{3}{5} q_1(-ikr) + q_3(-ikr) \left(\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{3}{5} \right) \right]$	$-\frac{3\partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i} \delta}{5}$

Tableau 1.3 – Les premiers multipôles en domaine fréquentiel

1.1.3 Détermination des parties singulières $\widehat{\mathbf{S}}_\alpha$ pour les premiers multipôles

Cette section a plus un intérêt mathématique que pratique et n'aura pas d'influence dans la suite. Elle peut être omise en première lecture. Rappelons quelques résultats de la théorie des distributions.

Définition 1.1. En dimension 1, une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite *symétrique* si pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ antisymétrique, nous avons $\langle T; \Psi \rangle = 0$. De façon similaire, $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est dite *antisymétrique* si pour tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ symétrique, nous avons $\langle T; \Psi \rangle = 0$.

En dimension 3, une distribution est *symétrique* ou *antisymétrique* par rapport à chacune des variables d'espace. Plus précisément, T est dite *symétrique*, respectivement *antisymétrique*, par rapport à la variable x_i si

$$\langle T; \Psi \rangle_{\mathbb{R}^3} = 0 \quad (1.48)$$

pour tout Ψ antisymétrique, respectivement symétrique, par rapport à la variable x_i .

Remarque 1.8. En dimension 1, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est symétrique, respectivement antisymétrique, alors sa dérivée est antisymétrique, respectivement symétrique. En effet, si $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est symétrique, respectivement antisymétrique, sa dérivée est de parité opposée. Il suit que

$$\langle T'; \Psi \rangle = -\langle T; \Psi' \rangle = 0 \quad (1.49)$$

pour T et $\Psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de même parité.

En dimension 3, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est symétrique, respectivement antisymétrique, par rapport à la variable x_i alors sa dérivée est antisymétrique, respectivement symétrique par rapport à la variable x_i .

De plus, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est symétrique par rapport à x_1, x_2 et x_3 alors $\partial_{\mathbf{x}}^{|\alpha|} T$ admet la même parité que α_1 par rapport à x_1 , α_2 par rapport à x_2 et α_3 par rapport à x_3 .

Définition 1.2. Nous disons qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est d'ordre au plus $p \in \mathbb{N}$ si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^3$ et tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ à support dans K

$$\langle T, \psi \rangle \leq C_K \|\psi\|_{W^{p,\infty}(\mathbb{R}^3)} \quad (1.50)$$

avec

$$\|\psi\|_{W^{p,\infty}(\mathbb{R}^3)} = \sum_{|\alpha| \leq p} \|\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} \psi\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^3)}. \quad (1.51)$$

L'ordre de la distribution est défini comme le plus petit p pour lequel cette propriété est valable.

Rappelons que si $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est d'ordre au plus $p \in \mathbb{N}$ alors $\partial_{\mathbf{x}}^{\alpha} T$ est d'ordre au plus $p + |\alpha|$.

Définition 1.3. Nous disons qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est à support dans le compact $K \subset \mathbb{R}^3$ si pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ identiquement nul hors de K

$$\langle T, \psi \rangle = 0. \quad (1.52)$$

Rappelons aussi que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est une distribution à support $\{\mathbf{0}\}$ d'ordre au plus p alors T est une somme finie de Dirac d'ordre au plus p

$$T = \sum_{|\beta| \leq p} c_{\beta} \partial_{\mathbf{x}}^{\beta} \delta. \quad (1.53)$$

D'autre part, $\partial_{\mathbf{x}}^{\beta} \delta$ admet la même parité que β . Il suit que si T est d'une parité la somme (1.53) ne comporte que des β ayant cette parité.

Pour $\alpha = 0$

La distribution $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}^{-}$ est explicitement donnée par

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}^{-} = \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \quad (1.54)$$

Elle ne contient pas de partie singulière

$$\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{0}} = 0. \quad (1.55)$$

Donc $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}^{-}$ est une distribution d'ordre 0 car pour tout K compact et tout $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ à support dans K

$$\left\langle \widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}^{-}; \Psi \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \leq C_K \|\Psi\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^3)}. \quad (1.56)$$

Pour $|\alpha| = 1$

Pour déterminer $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i}$, nous allons calculer la dérivée au sens des distributions de $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}^{-}$ par rapport à x_3 puis déduire ses dérivées par rapport à x_1 et x_2 par symétrie.

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}^{-}; \Psi \right\rangle &= - \left\langle \widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}^{-}; \partial_{x_3} \Psi \right\rangle \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{0}}^{-} \partial_{x_3} \Psi \, dV. \end{aligned}$$

Or $\partial_{x_3} \Psi = \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \Psi$, d'où

$$\left\langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{T}}_0^-; \Psi \right\rangle = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_0^- \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \Psi \, dV.$$

On applique ensuite la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} - \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{T}}_0^- \mathbf{e}_3 \cdot \nabla \Psi \, dV &= \int_{|x| > \varepsilon} \Psi \left(\nabla \cdot \widehat{\mathbf{M}}_0^- \mathbf{e}_3 \right) \, dV + \int_{|x| = \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_0^- \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_r \Psi \, dS \\ &= \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}_3}^- \Psi \, dV + \int_{|x| = \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_0^- \Psi \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_r \, dS. \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_r = \cos \theta$ et $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. Nous avons

$$\left\langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{T}}_0^-; \Psi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}_3}^- \Psi \, dV + \int_{|x| = \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_0^- \Psi r^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta d\varphi \right)$$

Comme $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, nous avons

$$\widehat{\mathbf{M}}_0^- \Psi r^2 \cos \theta \sin \theta = \frac{\exp(ikr)}{4\pi} r \cos \theta \sin \theta \Psi(\mathbf{x}) = O_{r \rightarrow 0}(r). \quad (1.57)$$

Il suit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| = \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_0^- \Psi r^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta d\varphi = 0. \quad (1.58)$$

Ainsi nous pouvons définir

$$\left\langle \widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}_3}^-; \Psi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}_3}^- \Psi \, dV. \quad (1.59)$$

Nous arrivons finalement à

$$\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{e}_3}^- = \widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}_3}^-.$$

Nous obtenons donc

$$\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_3} = 0. \quad (1.60)$$

Par symétrie, nous avons aussi

$$\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i} = 0. \quad (1.61)$$

Comme $\widehat{\mathbf{M}}_{\mathbf{e}_i}^- = O_{r \rightarrow 0}\left(\frac{1}{r^2}\right)$, $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{e}_i}^-$ est une distribution d'ordre 0.

Pour $|\alpha| = 2$

Comme $\widehat{\mathbf{T}}_{\mathbf{e}_i}^-$ est une distribution d'ordre 0 pour tout i , $\widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}^-$ est une distribution d'ordre au plus 1. Il suit que sa partie singulière est de la forme

$$\widehat{\mathbf{S}}_{\alpha} = \gamma_{\alpha, \mathbf{0}} \delta + \gamma_{\alpha, \mathbf{e}_1} \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_1} \delta + \gamma_{\alpha, \mathbf{e}_2} \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_2} \delta + \gamma_{\alpha, \mathbf{e}_3} \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_3} \delta. \quad (1.62)$$

En tenant compte de la parité de $\widehat{\mathbf{S}}_{\alpha}^-$ ($\widehat{\mathbf{S}}_{2\mathbf{e}_i}$ est paire par rapport à x_1, x_2 et x_3 et $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j}$ avec $i \neq j$ est impaire par rapport à x_i et x_j et paire par rapport à la troisième variable). Nous en déduisons que pour tout α d'ordre 2

$$\gamma_{\alpha, \mathbf{e}_1} = \gamma_{\alpha, \mathbf{e}_2} = \gamma_{\alpha, \mathbf{e}_3} = 0. \quad (1.63)$$

De plus, pour $\alpha = \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$ avec $i \neq j$, nous obtenons

$$\gamma_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j, \mathbf{0}} = 0. \quad (1.64)$$

Grâce aux symétries nous avons trouvé

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{S}}_{2\mathbf{e}_i} = \gamma_{2\mathbf{e}_i, \mathbf{0}} \delta = \gamma \delta \\ \widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j} = 0. \end{cases} \quad (1.65)$$

D'autre part, la solution $\widehat{\mathbf{T}}_0^-$ de l'équation $\Delta \widehat{\mathbf{T}}_0^- + k^2 \widehat{\mathbf{T}}_0^- = -\delta$ vérifie $\widehat{\mathbf{T}}_0^- = \widehat{\mathbf{M}}_0^- + \widehat{\mathbf{S}}_0$ et

$$\begin{aligned} \Delta \widehat{\mathbf{T}}_0^- + k^2 \widehat{\mathbf{T}}_0^- &= -\delta, \\ \Leftrightarrow \Delta \widehat{\mathbf{M}}_0^- + k^2 \widehat{\mathbf{M}}_0^- + \Delta \widehat{\mathbf{S}}_0 + k^2 \widehat{\mathbf{S}}_0 &= -\delta, \end{aligned}$$

or $\Delta \widehat{\mathbf{M}}_0^- + k^2 \widehat{\mathbf{M}}_0^- = 0$, $\widehat{\mathbf{S}}_0 = 0$, donc

$$\begin{cases} \Delta \widehat{\mathbf{S}}_0 = \widehat{\mathbf{S}}_{2\mathbf{e}_1} + \widehat{\mathbf{S}}_{2\mathbf{e}_2} + \widehat{\mathbf{S}}_{2\mathbf{e}_3} = -\delta, \\ \widehat{\mathbf{S}}_{2\mathbf{e}_1} + \widehat{\mathbf{S}}_{2\mathbf{e}_2} + \widehat{\mathbf{S}}_{2\mathbf{e}_3} = 3\gamma\delta. \end{cases} \quad (1.66)$$

Nous en déduisons

$$\gamma = -\frac{1}{3}. \quad (1.67)$$

Pour $|\alpha| = 3$

Comme $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j} = 0$ pour tout $i \neq j$, $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}$ est une distribution d'ordre au plus 1. $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3}$ est impaire par rapport à \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 et \mathbf{e}_3 , il suit

$$\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3} = 0. \quad (1.68)$$

Il nous reste à calculer $\widehat{\mathbf{S}}_{3\mathbf{e}_i}$ et $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_j}$. Commençons par calculer la dérivée au sens des distributions de $\widehat{\mathbf{T}}_{2\mathbf{e}_3}^-$ par rapport à \mathbf{e}_3 , puis nous déduirons ses dérivées par rapport à \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 par symétrie.

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^-; \Psi \rangle &= -\langle \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^-; \partial_{x_3} \Psi \rangle \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^- \partial_{x_3} \Psi \, dV. \end{aligned}$$

Or $\partial_{x_3} \Psi = \vec{\mathbf{e}}_3 \cdot \nabla \Psi$, d'où

$$\langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^-; \Psi \rangle = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^- \vec{\mathbf{e}}_3 \cdot \nabla \Psi \, dV.$$

Nous appliquons ensuite la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^- \vec{\mathbf{e}}_3 \cdot \nabla \Psi \, dV &= \int_{|x| > \varepsilon} \Psi \left(\nabla \cdot \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^- \vec{\mathbf{e}}_3 \right) dV + \int_{|x| = \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^- \vec{\mathbf{e}}_3 \Psi \cdot dS \vec{\mathbf{e}}_r \\ &= \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^- \Psi \, dV + \int_{|x| = \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^- \Psi \vec{\mathbf{e}}_3 \cdot dS \vec{\mathbf{e}}_r. \end{aligned}$$

Comme $\vec{\mathbf{e}}_3 \cdot \vec{\mathbf{e}}_r dS = r^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$, nous avons

$$\langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^-; \Psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^- \Psi \, dV + \int_{|x| = \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^- \Psi r^2 \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \right)$$

Faisons un DL en 0 de Ψ

$$\Psi(x) = \Psi(0) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \partial_{x_1} \Psi(0) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_2 \partial_{x_2} \Psi(0) + \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_3 \partial_{x_3} \Psi(0) + O_{r \rightarrow 0}(r^2). \quad (1.69)$$

La fonction f définie par $f(\mathbf{x}) = \left(\left((ik)^2 - \frac{3ik}{r} + \frac{3}{r^2} \right) \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) + \frac{(ik)^2}{3} \right) \frac{\exp(ikr)}{4\pi} r \cos \theta \sin \theta$ est antisymétrique en x_1 et x_2 sur un domaine symétrique en x_1 et x_2 . Par conséquent,

$$\int_{|x|=\varepsilon} x_1 \cdot \partial_{x_1} \Psi(0) f(x) d\theta d\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \int_{|x|=\varepsilon} x_2 \cdot \partial_{x_2} \Psi(0) f(x) d\theta d\varphi = 0. \quad (1.70)$$

Nous avons également $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \Psi(0) d\theta d\varphi = 0$. De plus, $f(\mathbf{x}) \times r^2 = O_{r \rightarrow 0}(r)$. Il suit

en notant $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|\mathbf{x}|=\varepsilon} f(\mathbf{x}) (\Psi(\mathbf{x}) - \Psi(\mathbf{0}) - \nabla \Psi(\mathbf{0}) \cdot \vec{X}) = 0. \quad (1.71)$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^- \Psi r^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} 3 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{4\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \partial_{x_3} \Psi(0) d\theta d\varphi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|=\varepsilon} \frac{1}{4\pi} (3 \cos^4 \theta \sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta) \partial_{x_3} \Psi(0) d\theta d\varphi \\ &= \frac{2\pi}{4\pi} \left[\frac{-3 \cos^5 \theta}{5} + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \partial_{x_3} \Psi(0) \\ &= \frac{4}{15} \partial_{x_3} \Psi(0). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors associer à la fonction $\widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^-$ la valeur principale

$$\langle \widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^-; \Psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^- \Psi dV. \quad (1.72)$$

D'où

$$\langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^-; \Psi \rangle = \langle \widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^-; \Psi \rangle + \frac{4}{15} \partial_{x_3} \Psi(0).$$

Par conséquent nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^-; \Psi \rangle &= \langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^-; \Psi \rangle + \left\langle \frac{4}{15} \delta; \partial_{x_3} \Psi \right\rangle \\ &= \langle \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^-; \Psi \rangle + \left\langle -\frac{4}{15} \delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_3}; \Psi \right\rangle. \end{aligned}$$

Nous arrivons finalement à

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{T}}_{3\mathbf{e}_3}^- &= \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{T}}_{2\mathbf{e}_3}^- = \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{M}}_{2\mathbf{e}_3}^- + \partial_{x_3} \widehat{\mathbf{S}}_{2\mathbf{e}_3} \\ &= \widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^- - \frac{4}{15} \delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_3} - \frac{\delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_3}}{3} \\ &= \widehat{\mathbf{M}}_{3\mathbf{e}_3}^- - \frac{3}{5} \delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_3}. \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\widehat{\mathbf{S}}_{3\mathbf{e}_3} = -\frac{3}{5}\delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_3}. \quad (1.73)$$

Par symétrie, nous avons aussi

$$\widehat{\mathbf{S}}_{3\mathbf{e}_i} = -\frac{3}{5}\delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i}. \quad (1.74)$$

D'autre part, l'équation $\Delta\widehat{\mathbf{T}}_0^- + k^2\widehat{\mathbf{T}}_0^- = -\delta$ amène également à

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{e}_i}\Delta\widehat{\mathbf{T}}_0^- + k^2\partial_{\mathbf{e}_i}\widehat{\mathbf{T}}_0^- &= -\delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i} \\ \Leftrightarrow \partial_{\mathbf{e}_i}\Delta\widehat{\mathbf{M}}_0^- + k^2\partial_{\mathbf{e}_i}\widehat{\mathbf{M}}_0^- + \partial_{\mathbf{e}_i}\Delta\widehat{\mathbf{S}}_0 + k^2\partial_{\mathbf{e}_i}\widehat{\mathbf{S}}_0 &= -\delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i} \\ \Leftrightarrow \widehat{\mathbf{S}}_{3\mathbf{e}_i} + \widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i+2\mathbf{e}_j} + \widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i+2\mathbf{e}_k} &= -\delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i}. \end{aligned}$$

Par symétrie du problème, nous avons $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i+2\mathbf{e}_j} = \widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i+2\mathbf{e}_k}$, d'où

$$\widehat{\mathbf{S}}_{3\mathbf{e}_i} + 2\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i+2\mathbf{e}_j} = -\delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i}. \quad (1.75)$$

L'équation (1.75) permet de déduire $\widehat{\mathbf{S}}_{\mathbf{e}_i+2\mathbf{e}_j} = -\frac{\delta_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i}}{5}$.

Remarque 1.9. Les fonctions $\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^-$, qui sont singulières en 0 doivent être prises au sens de

$$\langle \widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^-; \Psi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^- \Psi \, dV. \quad (1.76)$$

1.1.4 Solution causale de l'équation des ondes

Les multipôles en domaine temporel T_{α}^- vont être déduits de $\widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}^-$ en appliquant la transformée de Fourier inverse

$$T_{\alpha}^-(\mathbf{x}, t) = S_{\alpha}(\mathbf{x}, t) + M_{\alpha}^-(\mathbf{x}, t) \quad (1.77)$$

avec

$$S_{\alpha}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{\mathbf{S}}_{\alpha}(\mathbf{x}, k) \hat{\lambda}(k) \right) \quad \text{et} \quad M_{\alpha}^-(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^-(\mathbf{x}, k) \hat{\lambda}(k) \right). \quad (1.78)$$

Le distribution $\mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{\mathbf{S}}_{\alpha}(\mathbf{x}, k) \hat{\lambda}(k) \right)$ est à support dans $\{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : \mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ et } t \geq 0\}$. La fonction singulière

$$M_{\alpha}^-(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^-(\mathbf{x}, k) \hat{\lambda}(k) \right) \quad (1.79)$$

est une combinaison linéaire de

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1} \left((-ik)^{|\alpha|} \hat{\lambda}(k) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \right) \cos_n^m(\theta, \varphi) & \text{et de} \\ \mathcal{F}^{-1} \left((-ik)^{|\alpha|} \hat{\lambda}(k) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \right) \sin_n^m(\theta, \varphi). \end{cases} \quad (1.80)$$

Pour terminer le calcul des M_{α}^- , nous commençons par déduire de (1.6) que

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\hat{\lambda}(k) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \right) = \frac{\lambda(t - r/c)}{4\pi r}. \quad (1.81)$$

Il suit

$$\mathcal{F}^{-1} \left((-ik)^{|\alpha|} \hat{\lambda}(k) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \right) = \frac{1}{c^p} \frac{\lambda^{(p)}(t - r/c)}{4\pi r}. \quad (1.82)$$

Nous venons donc de démontrer le théorème 1.1.

Théorème 1.1. *Les multipôles en domaine temporel sont donnés par la formule explicite*

$$M_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{|\alpha|} \sum_{m=0}^n \left((\mathbf{A}_{\alpha})_n^m \cos_n^m(\theta, \varphi) + (\mathbf{B}_{\alpha})_n^m \sin_n^m(\theta, \varphi) \right) \left(\sum_{\ell=0}^n q_n^{\ell} \frac{\lambda^{(p-\ell)}(t-r/c)}{4\pi r^{\ell+1} c^{p-\ell}} \right), \quad (1.83)$$

avec les réels $(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m$ et $(\mathbf{B}_{\alpha})_n^m$ qui peuvent être déterminés par les formules (1.25), (1.27), (1.28) et (1.29).

Remarque 1.10. *La plupart des applications qui utilisent les multipôles ne se servent pas de la partie singulière. C'est sûrement la raison pour laquelle la plupart des auteurs n'ont porté aucune attention au terme S_{α} .*

Remarque 1.11. *Soulignons qu'il est possible d'obtenir (1.83) principalement grâce à la non dépendance en k des termes $(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m$ et $(\mathbf{B}_{\alpha})_n^m$.*

1.1.5 Les premiers multipôles en domaine temporel

Dans le théorème 1.1, nous avons donné une formule explicite pour obtenir les multipôles en domaine temporel. Cette formule peut être simplifiée pour les premiers multipôles et exprimée en coordonnées cartésiennes. Pour $|\alpha| \leq 3$, nous avons répertorié les premiers multipôles en domaine temporel et fréquentiel dans les tableaux 1.4 et 1.5.

α	$M_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, t)$	
0	$\frac{\lambda(t^{-})}{4\pi r}$	
\mathbf{e}_i	$-\left(\frac{\lambda'(t^{-})}{4\pi r c} + \frac{\lambda(t^{-})}{4\pi r^2}\right) \frac{x_i}{r}$	
$\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$	$\left(\frac{\lambda''(t^{-})}{4\pi r c^2} + 3\frac{\lambda'(t^{-})}{4\pi r^2 c} + 3\frac{\lambda(t^{-})}{4\pi r^3}\right) \frac{x_i x_j}{r^2}$	
$2\mathbf{e}_i$	$\left(\frac{\lambda''(t^{-})}{4\pi r c^2} + 3\frac{\lambda'(t^{-})}{4\pi r^2 c} + 3\frac{\lambda(t^{-})}{4\pi r^3}\right) \left(\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{\lambda''(t^{-})}{12\pi r c^2}$	
$\sum \mathbf{e}_i$	$\left(\frac{\lambda^{(3)}(t^{-})}{4\pi r c^3} + 6\frac{\lambda''(t^{-})}{4\pi r^2 c^2} + 15\frac{\lambda'(t^{-})}{4\pi r^3 c} + 15\frac{\lambda(t^{-})}{4\pi r^4}\right) \frac{-x_1 x_2 x_3}{r^3}$	
$\mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_j$	$-\frac{x_i}{r}$	$\left[\frac{\lambda^{(3)}(t^{-})}{20\pi r c^3} + \frac{\lambda''(t^{-})}{20\pi r^2 c^2} + \left(\frac{\lambda^{(3)}(t^{-})}{4\pi r c^3} + 6\frac{\lambda''(t^{-})}{4\pi r^2 c^2} + 15\frac{\lambda'(t^{-})}{4\pi r^3 c} + 15\frac{\lambda(t^{-})}{4\pi r^4}\right) \left(\frac{x_j^2}{r^2} - \frac{1}{5}\right)\right]$
$3\mathbf{e}_i$	$-\frac{x_i}{r}$	$\left[\frac{3\lambda^{(3)}(t^{-})}{20\pi r c^3} + \frac{3\lambda''(t^{-})}{20\pi r^2 c^2} + \left(\frac{\lambda^{(3)}(t^{-})}{4\pi r c^3} + 6\frac{\lambda''(t^{-})}{4\pi r^2 c^2} + 15\frac{\lambda'(t^{-})}{4\pi r^3 c} + 15\frac{\lambda(t^{-})}{4\pi r^4}\right) \left(\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{3}{5}\right)\right]$

Tableau 1.4 – Les premiers multipôles en domaine temporel avec $t^{-} = t - r/c$ et $i \neq j$

α	0	\mathbf{e}_i	$\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$	$2\mathbf{e}_i$	$\sum \mathbf{e}_i$	$\mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_j$	$3\mathbf{e}_i$
S_{α}	0	0	0	$-\frac{\lambda(t) \otimes \delta}{3}$	0	$-\frac{\lambda(t) \otimes \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i} \delta}{5}$	$-\frac{3\lambda(t) \otimes \partial_{\mathbf{x}}^{\mathbf{e}_i} \delta}{5}$

Tableau 1.5 – Les premières parties singulières S_{α} en domaine temporel avec $i \neq j$

Conclusion

Dans cette section, nous venons d'exhiber les solutions causales singulières de l'équation des ondes homogène hors de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

1.2 Solution anti-causale de l'équation des ondes

Le gros du travail a été fait précédemment lorsque nous avons déterminé la solution causale. Nous irons donc plus vite dans cette partie. Nous considérons le problème posé au sens des distributions, similaire au problème (1.2) : trouver $T_\alpha^+ \in S'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ tel que

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 T_\alpha^+(\mathbf{x}, t) - \Delta T_\alpha^+(\mathbf{x}, t) = \lambda(t) \otimes \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \delta(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \text{supp}(T_\alpha^+) \subset \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : t \leq 0\}. \quad (1.84)$$

Remarque 1.12. *Les solutions du problème (1.84) ne sont plus causales mais anti-causales car une source en $t = 0$ génère une solution en des temps négatifs.*

Nous gardons les mêmes notations que dans 1.1. La théorie de la convolution nous donne une solution

$$T_\alpha^+(\mathbf{x}, t) = G^+(\mathbf{x}, t) * (\lambda(t) \otimes \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \delta(\mathbf{x})), \quad (1.85)$$

où nous prenons cette fois-ci G^+ la solution fondamentale anti-causale de l'équation des ondes

$$G^+(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta_{t+r/c}}{4\pi r}, \quad \text{avec } r = |\mathbf{x}|. \quad (1.86)$$

Pour $t^+ = t + r/c$, nous parlons de temps avancé.

Lemme 1.2. *Pour $\alpha = \mathbf{0}$, cette formule est explicite*

$$T_0^+(\mathbf{x}, t) = \frac{\lambda(t + r/c)}{4\pi r}. \quad (1.87)$$

Preuve. D'après (1.85), $T_0^+(\mathbf{x}, t) = G^+(\mathbf{x}, t) * (\lambda(t) \otimes \delta(\mathbf{x}))$. En remplaçant $f(\mathbf{x}, t)$ par $G^+(\mathbf{x}, t)$ et $g(\mathbf{x}, t)$ par $\lambda(t) \otimes \delta(\mathbf{x})$ dans (1.7), nous obtenons

$$\langle G^+(\mathbf{x}, t) * (\lambda(t) \otimes \delta(\mathbf{x})); \Psi(\mathbf{x}, t) \rangle = \left\langle G^+(\mathbf{x}, t); \langle \lambda(s) \otimes \delta(\mathbf{y}); \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \rangle_{\{\mathbf{y}, s\}} \right\rangle_{\{\mathbf{x}, t\}}. \quad (1.88)$$

Commençons par évaluer l'expression suivante

$$\langle \lambda(s) \otimes \delta(\mathbf{y}); \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \rangle_{\{\mathbf{y}, s\}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(s) \Psi(\mathbf{x}, t + s) ds \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}).$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{T}}_0^+(\mathbf{x}, t); \Psi(\mathbf{x}, t) \rangle &= \langle G^+(\mathbf{x}, t); \langle \lambda(s) \otimes \delta(\mathbf{y}); \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t + s) \rangle_{\{\mathbf{y}, s\}} \rangle_{\{\mathbf{x}, t\}} \\ &= \left\langle \frac{\delta_{t+\frac{r}{c}}}{4\pi r}; \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(s) \Psi(\mathbf{x}, t + s) ds \right\rangle_{\{\mathbf{x}, t\}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(s) \Psi(\mathbf{x}, -\frac{r}{c} + s) ds}{4\pi r} d\sigma_{\mathbf{x}} dr \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{S_r} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda(s + \frac{r}{c}) \Psi(\mathbf{x}, s) ds d\sigma_{\mathbf{x}} dr}{4\pi r} \\ &= \left\langle \frac{\lambda(t + \frac{r}{c})}{4\pi r}; \Psi(\mathbf{x}, t) \right\rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent, au sens des distributions nous avons démontré (1.87). \square

Pour $\alpha \neq \mathbf{0}$, nous adoptons la même stratégie pour évaluer T_α^+ qui passe par la transformée de Fourier. Rappelons que \hat{T} désigne la transformée de Fourier temporelle de T définie par (1.15) et (1.16). Grâce à la transformée de Fourier nous allons calculer \hat{T}_α^+ donnée par

$$\hat{T}_\alpha^+(\mathbf{x}, k) = \hat{\lambda}(k) \hat{\mathbf{T}}_\alpha^+(\mathbf{x}, k), \quad (1.89)$$

avec $\hat{\mathbf{T}}_\alpha^+$ la solution entrante singulière de l'équation de Helmholtz

$$-\Delta \hat{\mathbf{T}}_\alpha^+(\mathbf{x}, k) - k^2 \hat{\mathbf{T}}_\alpha^+(\mathbf{x}, k) = \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \delta(\mathbf{x}). \quad (1.90)$$

1.2.1 Solution entrante de l'équation de Helmholtz

En reproduisant les calculs de la section 1.1.1, nous obtenons que la solution entrante de l'équation de Helmholtz est la somme d'une distribution $\widehat{\mathbf{S}}_\alpha$ de support $\{\mathbf{0}\}$ et du multipôle $\widehat{\mathbf{M}}_\alpha^+$

$$\widehat{\mathbf{T}}_\alpha^+(\mathbf{x}, k) = \widehat{\mathbf{S}}_\alpha(\mathbf{x}, k) + \widehat{\mathbf{M}}_\alpha^+(\mathbf{x}, k). \quad (1.91)$$

Le multipôle $\widehat{\mathbf{M}}_\alpha^+(\mathbf{x}, k) = \widehat{\mathbf{P}}_\alpha(\mathbf{x}, k) \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r}$ avec $\widehat{\mathbf{P}}_\alpha$ donné par (1.19) et explicité pour les premiers α dans le tableau 1.3. Pour les \mathbf{S}_α , ce sont les mêmes que pour la solution sortante et les premiers sont également donnés dans le tableau 1.3. Le seul changement avec la partie précédente est que nous multiplions par $\frac{\exp(-ikr)}{4\pi r}$ et non par $\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}$.

1.2.2 Solution anti-causale de l'équation des ondes

Pour déterminer la solution singulière entrante en domaine temporel T_α^+ , nous allons appliquer la transformée de Fourier inverse à $\widehat{\mathbf{T}}_\alpha^+$.

$$T_\alpha^+(\mathbf{x}, t) = S_\alpha(\mathbf{x}, t) + M_\alpha^+(\mathbf{x}, t) \quad (1.92)$$

avec

$$S_\alpha(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{\mathbf{S}}_\alpha(\mathbf{x}, k) \hat{\lambda}(k) \right) \quad \text{et} \quad M_\alpha^+(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{\mathbf{M}}_\alpha^+(\mathbf{x}, k) \hat{\lambda}(k) \right). \quad (1.93)$$

La fonction singulière

$$M_\alpha^+(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}^{-1} \left(\widehat{\mathbf{M}}_\alpha^+(\mathbf{x}, k) \hat{\lambda}(k) \right) \quad (1.94)$$

est une combinaison linéaire de

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1} \left((-ik)^{|\alpha|} \hat{\lambda}(k) \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} \right) \cos_n^m(\theta, \varphi) \text{ et de} \\ \mathcal{F}^{-1} \left((-ik)^{|\alpha|} \hat{\lambda}(k) \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} \right) \sin_n^m(\theta, \varphi). \end{cases} \quad (1.95)$$

Pour finaliser la détermination de M_α^+ , nous déduisons de (1.87) que

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\hat{\lambda}(k) \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} \right) = \frac{\lambda(t + r/c)}{4\pi r}. \quad (1.96)$$

Il suit

$$\mathcal{F}^{-1} \left((-ik)^{|\alpha|} \hat{\lambda}(k) \frac{\exp(-ikr)}{4\pi r} \right) = \left(\frac{-1}{c} \right)^p \frac{\lambda^{(p)}(t + r/c)}{4\pi r}. \quad (1.97)$$

Nous venons de démontrer le théorème 1.2 suivant.

Théorème 1.2. *Le multipôle en domaine temporel est donné par*

$$M_\alpha^+(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{|\alpha|} \sum_{m=0}^n \left((\mathbf{A}_\alpha)_n^m \cos_n^m(\theta, \varphi) + (\mathbf{B}_\alpha)_n^m \sin_n^m(\theta, \varphi) \right) \left(\sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{(-1)^{p-\ell} \lambda^{(p-\ell)}(t + r/c)}{4\pi r^{\ell+1} c^{p-\ell}} \right) \quad (1.98)$$

avec $(\mathbf{A}_\alpha)_n^m$ et $(\mathbf{B}_\alpha)_n^m$ des réels pouvant être calculé à l'aide des formules (1.25), (1.27), (1.28) et (1.29).

Remarque 1.13. *Nous obtenons un résultat assez similaire avec la solution causale, en effet les seules différences sont que nous prenons f et ses dérivées au temps $t^+ = t + r/c$ au lieu de $t^- = t - r/c$ et nous avons un facteur $(-1)^{p-\ell}$ qui apparaît.*

Nous écrivons les premiers multipôles en temps avancé dans le tableau 1.6. Les S_α sont les mêmes que la solution causale, ils sont donnés dans le tableau 1.5.

α	$M_{\alpha}^{+}(\mathbf{x}, t)$
0	$\frac{\lambda(t^{+})}{4\pi r}$
\mathbf{e}_i	$-\left(\frac{-\lambda'(t^{+})}{4\pi r c} + \frac{\lambda(t^{+})}{4\pi r^2}\right) \frac{x_i}{r}$
$\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j$	$\left(\frac{\lambda''(t^{+})}{4\pi r c^2} - 3\frac{\lambda'(t^{+})}{4\pi r^2 c} + 3\frac{\lambda(t^{+})}{4\pi r^3}\right) \frac{x_i x_j}{r^2}$
$2\mathbf{e}_i$	$\left(\frac{\lambda''(t^{+})}{4\pi r c^2} - 3\frac{\lambda'(t^{+})}{4\pi r^2 c} + 3\frac{\lambda(t^{+})}{4\pi r^3}\right) \left(\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{\lambda''(t^{+})}{12\pi r c^2}$
$\sum \mathbf{e}_i$	$\left(\frac{-\lambda^{(3)}(t^{+})}{4\pi r c^3} + 6\frac{\lambda''(t^{+})}{4\pi r^2 c^2} - 15\frac{\lambda'(t^{+})}{4\pi r^3 c} + 15\frac{\lambda(t^{+})}{4\pi r^4}\right) \frac{-x_1 x_2 x_3}{r^3}$
$\mathbf{e}_i + 2\mathbf{e}_j$	$-\frac{x_i}{r} \left[\frac{-\lambda^{(3)}(t^{+})}{20\pi r c^3} + \frac{\lambda''(t^{+})}{20\pi r^2 c^2} + \left(\frac{-\lambda^{(3)}(t^{+})}{4\pi r c^3} + 6\frac{\lambda''(t^{+})}{4\pi r^2 c^2} - 15\frac{\lambda'(t^{+})}{4\pi r^3 c} + 15\frac{\lambda(t^{+})}{4\pi r^4}\right) \left(\frac{x_j^2}{r^2} - \frac{1}{5}\right) \right]$
$3\mathbf{e}_i$	$-\frac{x_i}{r} \left[\frac{-3\lambda^{(3)}(t^{+})}{20\pi r c^3} + \frac{3\lambda''(t^{+})}{20\pi r^2 c^2} + \left(\frac{-\lambda^{(3)}(t^{+})}{4\pi r c^3} + 6\frac{\lambda''(t^{+})}{4\pi r^2 c^2} - 15\frac{\lambda'(t^{+})}{4\pi r^3 c} + 15\frac{\lambda(t^{+})}{4\pi r^4}\right) \left(\frac{x_i^2}{r^2} - \frac{3}{5}\right) \right]$

Tableau 1.6 – Les premiers multipôles en domaine temporel avec $t^{+} = t + r/c$ et $i \neq j$

1.3 Étude des solutions régulières de l'équation des ondes

Dans cette partie nous étudions toujours le problème (1.2) mais nous allons cette fois-ci déterminer des solutions régulières en $\mathbf{x} = 0$. Pour cela, nous nous plaçons sur la boule de centre $\mathbf{0}$ et de rayon r^* , notée B_{r^*}

$$B_{r^*} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq r^* \right\}. \quad (1.99)$$

Cette partie va s'organiser comme suit. Nous commençons par exhiber quelques solutions régulières de l'équation des ondes dans une boule de rayon r^* dans la section 1.3.1. Ensuite nous donnerons une base de solutions régulières dans la section 1.3.2. En section 1.3.3, nous représentons toute solution régulière à l'aide de cette base. Enfin, nous exhiberons la solution développée à l'ordre 2 en section 1.3.4. Rappelons les notations $t^{+} = t + \frac{r}{c}$ et $t^{-} = t - \frac{r}{c}$.

1.3.1 Quelques solutions particulières régulières

Dans cette section, nous construisons quelques exemples de solutions régulières de l'équation des ondes. Commençons par expliquer d'où nous est venu l'idée pour déterminer une solution régulière. En régime fréquentiel, nous pouvons combiner une solution sortante et une solution entrante (fonction de Hankel 3D) pour générer une solution régulière

$$2j_n(kr) = h_n^{(1)}(kr) + h_n^{(2)}(kr). \quad (1.100)$$

Pour l'équation des ondes, nous reproduisons cette idée en combinant une solution causale singulière avec une solution anti-causale singulière afin de construire une solution régulière.

Notation 1.1. Nous spécifions la dépendance de M_{α} vis-à-vis de λ en introduisant les notations $M_{\alpha}^{+}[\lambda]$, respectivement $M_{\alpha}^{-}[\lambda]$, pour les multipôles de la solution anti-causale, respectivement causale.

Notation 1.2. Notons $\text{Reg}_{\alpha}^{[\lambda]}$ la différence entre $M_{\alpha}^{+}[\lambda]$ et $M_{\alpha}^{-}[\lambda]$, i.e.

$$\text{Reg}_{\alpha}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = M_{\alpha}^{-}[\lambda](\mathbf{x}, t) - M_{\alpha}^{+}[\lambda](\mathbf{x}, t), \quad (1.101)$$

avec $M_{\alpha}^{-}[\lambda]$ donné par le tableau 1.4 et $M_{\alpha}^{+}[\lambda]$ par le tableau 1.6.

Remarque 1.14. Remarquons que nous avons également la relation $\text{Reg}_{\alpha}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = T_{\alpha}^{-}(\mathbf{x}, t) - T_{\alpha}^{+}(\mathbf{x}, t)$ car les S_{α} sont identiques pour la solution causale et anti-causale et donc s'annulent.

Nous allons à présent voir quelques propriétés de $\text{Reg}_{\alpha}^{[\lambda]}$ pour $|\alpha| = 0$ et $|\alpha| = 1$. En particulier, nous allons vérifier que ces solutions sont régulières en $\mathbf{0}$. D'autre part, bien que les formules des $M_{\alpha}^{\pm}[\lambda]$ aient été obtenues pour $\lambda \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ elles peuvent être évaluées pour $\lambda \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. Dans cette partie, nous prendrons $\lambda \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$.

Ordre 0

Pour $\alpha = \mathbf{0}$, les multipôles $M_{\mathbf{0}}^{\pm}[\lambda]$ sont explicités dans les tableaux 1.4 et 1.6. Nous rappelons ici leur forme

$$M_{\mathbf{0}}^{-}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \frac{\lambda(t^{-})}{4\pi r} \text{ et } M_{\mathbf{0}}^{+}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \frac{\lambda(t^{+})}{4\pi r}. \quad (1.102)$$

Il suit de la définition de $\text{Reg}_{\alpha}^{[\lambda]}$ que

$$\text{Reg}_{\mathbf{0}}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = M_{\mathbf{0}}^{-}[\lambda](\mathbf{x}, t) - M_{\mathbf{0}}^{+}[\lambda](\mathbf{x}, t).$$

Remarquons que $\text{Reg}_{\mathbf{0}}^{[\lambda]}$ a les propriétés suivantes

Proposition 1.3. La fonction $\text{Reg}_{\mathbf{0}}^{[\lambda]}$ est régulière en $r = 0$ et

$$\text{Reg}_{\mathbf{0}}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = O_{r \rightarrow 0}(1). \quad (1.103)$$

Preuve de la proposition 1.3.

Développons $\text{Reg}_{\mathbf{0}}^{[\lambda]}$

$$\text{Reg}_{\mathbf{0}}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = \frac{\lambda(t - r/c)}{4\pi r} - \frac{\lambda(t + r/c)}{4\pi r}.$$

Nous utilisons le développement de Taylor de λ en t quand r tend vers 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Reg}_{\mathbf{0}}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi r} \left(\lambda(t) + \lambda'(t)(-r/c) + O_{r \rightarrow 0}(r)^2 - \lambda(t) - \lambda'(t)(r/c) - O_{r \rightarrow 0}(r)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi r} \left(\frac{-2r}{c} \lambda'(t) + O_{r \rightarrow 0}(r^2) \right) = -\frac{\lambda'(t)}{2\pi c} + O_{r \rightarrow 0}(r). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.15. Les monopôles $M_{\mathbf{0}}^{\pm}[\lambda]$ sont clairement singuliers en $\mathbf{0}$. Leur différence $\text{Reg}_{\mathbf{0}}^{[\lambda]}$ est cependant régulière.

Ordre 1

Pour $\alpha = \mathbf{e}_i$, nous allons combiner les deux multipôles d'ordre 1 donnés par les tableaux 1.4 et 1.6 dont nous rappelons ici leur forme

$$\begin{cases} M_{\mathbf{e}_i}^{-}[\lambda](\mathbf{x}, t) = - \left(\frac{\lambda'(t^{-})}{4\pi r c} + \frac{\lambda(t^{-})}{4\pi r^2} \right) \frac{x_i}{r} \\ M_{\mathbf{e}_i}^{+}[\lambda](\mathbf{x}, t) = - \left(\frac{-\lambda'(t^{+})}{4\pi r c} + \frac{\lambda(t^{+})}{4\pi r^2} \right) \frac{x_i}{r}. \end{cases} \quad (1.104)$$

Il suit

$$\text{Reg}_{\mathbf{e}_i}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = M_{\mathbf{e}_i}^{-}[\lambda](\mathbf{x}, t) - M_{\mathbf{e}_i}^{+}[\lambda](\mathbf{x}, t).$$

La fonction $\text{Reg}_{\mathbf{e}_i}^{[\lambda]}$ vérifie les propriétés suivantes

Proposition 1.4. *La fonction $\text{Reg}_{\mathbf{e}_i}^{[\lambda]}$ est régulière en $r = 0$ et*

$$\text{Reg}_{\mathbf{e}_i}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = O_{r \rightarrow 0}(r). \quad (1.105)$$

Preuve de la proposition 1.4. Développons $\text{Reg}_{\mathbf{e}_i}^{[\lambda]}$

$$\text{Reg}_{\mathbf{e}_i}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = - \left(\frac{\lambda'(t^-)}{4\pi r c} + \frac{\lambda(t^-)}{4\pi r^2} \right) \frac{x_i}{r} + \left(\frac{-\lambda'(t^+)}{4\pi r c} + \frac{\lambda(t^+)}{4\pi r^2} \right) \frac{x_i}{r}.$$

Nous utilisons le développement de Taylor à l'ordre 3 de f en t quand r tend vers 0, nous obtenons

$$\text{Reg}_{\mathbf{e}_i}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = - \frac{\lambda^{(3)}(t)x_i}{6\pi c^3} + O_{r \rightarrow 0}(r^2) = O_{r \rightarrow 0}(r).$$

□

Remarque 1.16. *Pour les multipôles d'ordre 1 nous remarquons également qu'en partant de deux solutions singulières nous obtenons une solution régulière en les soustrayant.*

1.3.2 Une base de solution régulière de l'équation des ondes

Dans cette section, nous allons construire une base afin de représenter facilement les solutions régulières de l'équation des ondes. Dans la section 1.3.1 nous avons montré quelques exemples de solutions régulières pour $\alpha \leq 1$. À présent, exhibons des solutions régulières à tout ordre.

Il est tout à fait possible d'introduire la fonction régulière $\text{Reg}_{\alpha}^{[\lambda]}$ à tout ordre

$$\text{Reg}_{\alpha}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = M_{\alpha}^{-}[\lambda](\mathbf{x}, t) - M_{\alpha}^{+}[\lambda](\mathbf{x}, t), \quad (1.106)$$

avec $M_{\alpha}^{-}[\lambda]$ qui est donné par (1.83) et $M_{\alpha}^{+}[\lambda]$ par (1.98). Cette fonction est bien régulière en $\mathbf{0}$ mais ne vérifie pas

$$\text{Reg}_{\alpha}^{[\lambda]}(\mathbf{x}, t) = O_{r \rightarrow 0}(r^{|\alpha|}). \quad (1.107)$$

Nous préférons ici introduire une autre famille de solutions régulières de l'équation des ondes, $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda]$, indexée par deux entiers naturels m et n avec $0 \leq m \leq n$ et pol qui peut prendre les valeurs cos ou sin

$$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t) = M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda](\mathbf{x}, t) - M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda](\mathbf{x}, t), \quad (1.108)$$

avec $M_{m,n}^{\text{pol},\pm}[\lambda]$ défini par

$$\begin{cases} M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda](\mathbf{x}, t^-) = \text{pol}_n^m(\theta, \varphi) \sum_{\ell=0}^n q_n^{\ell} \frac{\lambda^{(n-\ell)}(t^-)}{4\pi r^{\ell+1} c^{n-\ell}}, \\ M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda](\mathbf{x}, t^+) = \text{pol}_n^m(\theta, \varphi) \sum_{\ell=0}^n q_n^{\ell} \frac{(-1)^{n-\ell} \lambda^{(n-\ell)}(t^+)}{4\pi r^{\ell+1} c^{n-\ell}}, \end{cases} \quad (1.109)$$

avec pol_n^m défini par (1.22). Remarquons qu'il est possible d'écrire les multipôles $M_{\alpha}^{\pm}[\lambda]$ comme combinaison linéaire des $M_{m,n}^{\text{pol},\pm}[\lambda]$

$$\begin{cases} M_{\alpha}^{-}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{|\alpha|} \sum_{m=0}^n (\mathbf{A}_{\alpha})_n^m M_{m,n}^{\text{cos},-}[(1/c)^{|\alpha|-n} \lambda^{|\alpha|-n}](\mathbf{x}, t^-) \\ \quad + (\mathbf{B}_{\alpha})_n^m M_{m,n}^{\text{sin},-}[(1/c)^{|\alpha|-n} \lambda^{|\alpha|-n}](\mathbf{x}, t^-) \\ M_{\alpha}^{+}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{|\alpha|} \sum_{m=0}^n (\mathbf{A}_{\alpha})_n^m M_{m,n}^{\text{cos},+}[(-1/c)^{|\alpha|-n} \lambda^{|\alpha|-n}](\mathbf{x}, t^+) \\ \quad + (\mathbf{B}_{\alpha})_n^m M_{m,n}^{\text{sin},+}[(-1/c)^{|\alpha|-n} \lambda^{|\alpha|-n}](\mathbf{x}, t^+). \end{cases} \quad (1.110)$$

D'autre part, les $M_{m,n}^{\text{pol},\pm}$ peuvent eux aussi être écrits comme une combinaison linéaire des M_{α}^{\pm} mais nous ne l'explicitons pas ici. Réciproquement, les fonctions $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda]$ vérifient les propriétés suivantes :

Théorème 1.3. *Soit $\lambda \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$. Les fonctions $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda]$ sont régulières en $r = 0$ et*

$$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda] = \underset{r \rightarrow 0}{O}(r^n). \quad (1.111)$$

La preuve du théorème 1.3 nécessite un certain nombre de prérequis. Commençons par définir les polynômes $Q_n^k(X)$ pour $k \leq 2n$:

$$Q_n^k(X) = \sum_{\ell=0}^{\inf(n, 2n-k)} q_n^{n-\ell} \frac{X^{2n-\ell-k}}{(2n-\ell-k)!}. \quad (1.112)$$

avec $q_n^{\ell} = \frac{(n+\ell)!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{1}{2^{\ell}}$ donné par (1.21). Pour k positif, Q_n^k est la k -ième dérivée de Q_n^0 . Pour k négatif, Q_n^k est la primitive de Q_n^{k+1} qui vaut 0 en $X = 0$. Pour $k \leq n$ cette formule se simplifie de la manière suivante

$$Q_n^k(X) = \sum_{\ell=0}^n q_n^{n-\ell} \frac{X^{2n-\ell-k}}{(2n-\ell-k)!}. \quad (1.113)$$

Lemme 1.3. *Pour $k \in \mathbb{N}$ impair, nous avons*

$$Q_n^k(-1) = 0. \quad (1.114)$$

Preuve du lemme 1.3. Comme $q_n^k = q_n^n \frac{(n+k)!}{(2n)! 2^{k-n}} C_n^k$, nous avons d'après (1.113)

$$Q_n^0(X) = \frac{X^n}{(2n)!} q_n^n \sum_{\ell=0}^n X^{\ell} C_n^{\ell} 2^{n-\ell}. \quad (1.115)$$

D'après la formule du binôme de Newton, nous obtenons

$$Q_n^0(X) = q_n^n \frac{X^n (X+2)^n}{(2n)!}. \quad (1.116)$$

Il suit que Q_n^0 est symétrique par rapport à $X = -1$. Nous en déduisons que toutes les dérivées impaires de Q_n^0 en -1 sont nulles. \square

Nous avons aussi l'identité suivante

Lemme 1.4. *Pour tout $\lambda \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$, nous avons*

$$\sum_{\ell=0}^n q_n^{\ell} \frac{\lambda^{(n-\ell)}(t^-) - (-1)^{n-\ell} \lambda^{(n-\ell)}(t^+)}{4\pi r^{\ell+1} c^{n-\ell}} = \frac{r^n}{2\pi} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^K r^k \frac{\lambda^{(k+1+2n)}(t)}{c^{k+1+2n}} Q_n^{-k-1}(-1) + \underset{r \rightarrow 0}{O}(r^{n+K+1}). \quad (1.117)$$

Preuve du lemme 1.4. Commençons par expliciter le développement de Taylor de $\lambda^{(p-\ell)}$ en t^+ et en t^- au sens des séries formelles

$$\begin{cases} \lambda^{(|\alpha|-\ell)}(t^-) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{(|\alpha|-\ell+k)}(t)}{k!} \left(\frac{-r}{c}\right)^k \\ \lambda^{(|\alpha|-\ell)}(t^+) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{(|\alpha|-\ell+k)}(t)}{k!} \left(\frac{r}{c}\right)^k \end{cases} \quad (1.118)$$

Remarque 1.17. *Nous avons noté*

$$f(r) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} f_k r^k, \quad (1.119)$$

si et seulement si

$$f(r) = \sum_{k=0}^K f_k r^k + O_{r \rightarrow 0}(r^{K+1}). \quad (1.120)$$

Notons S le membre de gauche de (1.117), nous avons

$$\begin{aligned} 4\pi S &= \sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{\lambda^{(n-\ell)}(t^-) - (-1)^{n-\ell} \lambda^{(n-\ell)}(t^+)}{r^{\ell+1} c^{n-\ell}} \\ &\sim \sum_{\ell=0}^n \frac{q_n^\ell}{r^{\ell+1} c^{n-\ell}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{(n-\ell+k)}(t)}{k!} \left(\frac{r}{c}\right)^k [(-1)^k - (-1)^{n-\ell}]. \end{aligned}$$

Il suit avec les changements d'indice $\ell = n - \ell$ puis $k = k + \ell$ que

$$\begin{aligned} 4\pi S &\sim \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^{+\infty} q_n^{n-\ell} \frac{\lambda^{(\ell+k)}(t)}{k!} \left(\frac{r}{c}\right)^{\ell+k} [(-1)^k - (-1)^\ell] \quad \text{avec } \ell = n - \ell \\ &\sim \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{l=0}^n \sum_{k=l}^{+\infty} q_n^{n-\ell} \frac{\lambda^{(k)}(t)}{(k-\ell)!} \left(\frac{r}{c}\right)^k [(-1)^{k-\ell} - (-1)^\ell] \quad \text{avec } k = k + \ell. \end{aligned}$$

En intervertissant les deux sommes, nous avons

$$4\pi S \sim \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{\inf(k,n)} q_n^{n-\ell} \frac{\lambda^{(k)}(t)}{(k-\ell)!} \left(\frac{r}{c}\right)^k [(-1)^{k-\ell} - (-1)^\ell].$$

Nous remarquons que pour k pair on a $(-1)^{k-\ell} - (-1)^\ell = (-1)^{-\ell} - (-1)^\ell = 0$ et pour k impair $(-1)^{k-\ell} - (-1)^\ell = -2(-1)^\ell = 2(-1)^{k-\ell}$. Nous pouvons ainsi réduire la première somme aux k impairs

$$\sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{\lambda^{(n-\ell)}(t^-) - (-1)^{n-\ell} \lambda^{(n-\ell)}(t^+)}{r^{\ell+1} c^{n-\ell}} \sim \frac{2}{r^{n+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^{\inf(k,n)} q_n^{n-\ell} \frac{\lambda^{(k)}(t)}{(k-\ell)!} \left(\frac{r}{c}\right)^k (-1)^{k-\ell}. \quad (1.121)$$

Nous décomposons la somme en deux parties $S = S_1 + S_2$. La première correspond aux $k \leq 2n$

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \sum_{\ell=0}^{\inf(n,k)} q_n^{n-\ell} \frac{\lambda^{(k)}(t)}{(k-\ell)!} \left(\frac{r}{c}\right)^k (-1)^{k-\ell} \\ &= \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \left(\frac{r}{c}\right)^k \lambda^{(k)}(t) Q_n^{2n-k}(-1). \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.3, $Q_n^{2n-k}(-1) = 0$, donc $S_1 = 0$. La seconde somme S_2 correspond à la somme pour les $k \geq 2n + 1$

$$\begin{aligned} S_2 &\sim \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \sum_{\substack{k=2n+1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \sum_{\ell=0}^n q_n^{n-\ell} \frac{\lambda^{(k)}(t)}{(k-\ell)!} \left(\frac{r}{c}\right)^k (-1)^{k-\ell} \\ &\sim \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \sum_{\substack{k=2n+1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^k \lambda^{(k)}(t) Q_n^{2n-k}(-1), \end{aligned}$$

Comme $S_1 = 0$, il suit que $S = S_2$, c'est à dire

$$S \sim \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \sum_{\substack{k=2n+1 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^k \lambda^{(k)}(t) Q_n^{2n-k}(-1). \quad (1.122)$$

En faisant le changement de variable $k' = k - 2n - 1$, nous obtenons le lemme 1.4 (comme k est impair, k' est pair). \square

Nous avons à présent le matériel nécessaire pour démontrer le théorème 1.3.

Preuve du théorème 1.3. Commençons par expliciter $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda]$

$$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \text{pol}_m^n(\theta, \varphi) \sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{\lambda^{(n-\ell)}(t^-) - (-1)^{n-\ell} \lambda^{(n-\ell)}(t^+)}{4\pi r^{\ell+1} c^{n-\ell}} \quad (1.123)$$

Le lemme 1.4 nous permet d'écrire

$$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \frac{\text{pol}_m^n(\theta, \varphi)}{2\pi} r^n \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^K r^k \frac{\lambda^{(k+2n+1)}(t)}{c^{k+2n+1}} Q_n^{-k-1}(-1) + O_{r \rightarrow 0}(r^{K+n+1}). \quad (1.124)$$

Nous déduisons le comportement de $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t)$ à l'aide du premier terme de cette somme

$$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t) = O_{r \rightarrow 0}(r^n). \quad (1.125)$$

Ceci termine la preuve du théorème 1.3. \square

Remarque 1.18. *Le lecteur pourra remarquer que nous n'avons pas démontré que cette famille de solutions régulières est une base. Il est clair que cette famille est libre car leur partie angulaire pol_n^m forme une base spectrale sur la sphère unité. Le caractère générateur de cette famille sera une conséquence du théorème 1.4 qui suit.*

1.3.3 Représentation des solutions régulières de l'équation des ondes

Théorème 1.4. *Pour a une fonction $C^\infty(\Gamma_{r^*} \times \mathbb{R})$ qui vérifie*

$$a(\mathbf{x}, t) = 0, \text{ pour } \mathbf{x} \in \Gamma_{r^*} \text{ et } t \leq 0, \quad (1.126)$$

il existe une unique solution causale $u \in C^\infty(B_{r^} \times \mathbb{R})$ de l'équation des ondes*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in B_{r^*} \text{ et } t \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in B_{r^*}, \\ u(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_{r^*} \text{ et } t \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in B_{r^*} \text{ et } t \leq 0. \end{cases} \quad (1.127)$$

Cette solution admet la décomposition modale suivante

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} \text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda_{m,n}^{\text{pol}}](\mathbf{x}, t), \quad (1.128)$$

avec $\lambda_{m,n}^{\text{pol}}$ des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ qui vérifient

$$\lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t) = 0, \text{ pour } t < \frac{r^*}{c}. \quad (1.129)$$

Preuve. Afin de démontrer le résultat annoncé, rappelons que toute fonction $a \in H^{1/2}(\Gamma_{r^*})$ peut être écrite sous la forme d'une série, voir annexe. Nous procéderons de la manière suivante

- i) Existence, unicité et définition d'un opérateur solution
- ii) Résolution pour $a(\mathbf{x}, t) = a_{m,n}^{\text{pol}}(t) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi)$
- iii) Obtention de la formule générale.

i) Caractère bien posé de l'équation des ondes sur un domaine régulier

Dans cette première partie de preuve, nous démontrons que (1.130) est bien posé. Soit Ω un domaine régulier de frontière $\partial\Omega$ (lors de cette thèse Ω sera successivement B_{r^*} la boule de rayon r^* , $C_{r_1}^{r_2}$ la couronne de petit rayon r_1 et de grand rayon r_2 ou encore $\Omega_{\varepsilon, r^*} = \Omega_{\varepsilon} \cap B_{r^*}$).

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u(\mathbf{x}, t) = f_s(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } t \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ et } t \geq 0, \\ u(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } t \leq 0, \end{cases} \quad (1.130)$$

avec $a : \partial\Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $f_s : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ qui vérifient

$$a(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ et } f_s(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{pour } t \leq 0. \quad (1.131)$$

Remarque 1.19. Nous avons équivalence entre les conditions du problème (1.130) avec les conditions initiales $u(\mathbf{x}, 0) = 0$ et $\partial_t u(\mathbf{x}, 0) = 0$.

Nous relevons tout d'abord la fonction a en \tilde{a} comme suit : soit $\tilde{a} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega \times \mathbb{R})$ l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \tilde{a}(\mathbf{x}, t) - \tilde{a}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \tilde{a}(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.132)$$

Posons $\tilde{u}(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - \tilde{a}(\mathbf{x}, t)$. Pour démontrer l'existence et l'unicité de u , commençons par démontrer l'existence et l'unicité de \tilde{u} . Nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u}(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta \tilde{u}(\mathbf{x}, t) = -\partial_t^2 \tilde{a}(\mathbf{x}, t) + c^2 \Delta \tilde{a}(\mathbf{x}, t) + f_s(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } t \geq 0, \\ \tilde{u}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \partial\Omega \text{ et } t \geq 0, \\ \tilde{u}(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } t \leq 0. \end{cases} \quad (1.133)$$

La dernière ligne de (1.133) peut être transformée en la condition initiale

$$\partial_t \tilde{u}(\mathbf{x}, 0) = \tilde{u}(\mathbf{x}, 0) = 0, \text{ pour } \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.134)$$

en remarquant que $\tilde{a}(\mathbf{x}, t) = 0$ pour $t \leq 0$. Posons $f(\mathbf{x}, t) = -\partial_t^2 \tilde{a}(\mathbf{x}, t) + c^2 \Delta \tilde{a}(\mathbf{x}, t) + f_s(\mathbf{x}, t)$,

$$F(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}, U(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(\mathbf{x}, t) \\ \partial_t \tilde{u}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 \Delta & 0 \end{pmatrix}. \text{ Nous obtenons}$$

$$\begin{cases} \partial_t U(\mathbf{x}, t) + AU(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega \text{ et } t \geq 0, \\ U(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (1.135)$$

Soit $V(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in H$, avec $H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Nous suivons la démarche adoptée dans [10]. Munissons $H_0^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$(u_1, u_2)_{H_0^1} = \int_{\mathbb{R}^3} c^2 \nabla u_1 \nabla u_2 d\sigma_{\mathbf{x}}. \quad (1.136)$$

Il suit $D(A) := \{V \in H, AV \in H\} = H_{\text{dir}}^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, avec $H_{\text{dir}}^2(\Omega) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. En effet, nous avons par définition

$$\{V \in H, AV \in H\} = \{u_1 \in H_0^1(\Omega), \Delta u_1 \in L^2(\Omega)\} \times \{u_2 \in L^2(\Omega), u_2 \in H_0^1(\Omega)\}. \quad (1.137)$$

Pour le premier ensemble, nous avons $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ qui vérifie $\Delta u_1 \in L^2(\Omega)$, nous déduisons que $u_1 \in H_{\text{dir}}^2(\Omega)$. Pour le second, nous obtenons $u_2 \in H_0^1(\Omega)$. Il suit

$$D(A) = H_{\text{dir}}^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \quad (1.138)$$

Nous avons donc A qui est un opérateur non borné de $D(A) \subset H$ vers H . Nous avons alors

$$(AV(\mathbf{x}), V(\mathbf{x}))_H = \begin{pmatrix} -u_2(\mathbf{x}) \\ -c^2 \Delta u_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = -(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))_{H_0^1} - (c^2 \Delta u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))_{L^2}. \quad (1.139)$$

Il suit d'après la formule de Green que $(AV(\mathbf{x}), V(\mathbf{x}))_H = 0$. A est donc monotone. Voyons si A

est maximal, prenons $V \in D(A)$ et $G = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in H$

$$(A + I)V(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}), \quad (1.140)$$

est équivalent à

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) - c^2 \Delta u_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1.141)$$

Ainsi d'après la première équation, nous avons $u_2 \in H_0^1(\Omega)$ car $f_1 \in H_0^1(\Omega)$. En injectant la première équation dans la seconde nous obtenons

$$u_1(\mathbf{x}) - c^2 \Delta u_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}). \quad (1.142)$$

Ceci implique à u_1 d'appartenir à $H_{\text{dir}}^2(\Omega)$. Donc $\forall G \in H$, nous avons trouvé un unique V appartenant à $D(A)$ tel que $(A + I)V(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$. A est donc maximal monotone.

D'après le théorème de Hille-Yosida, le problème (1.135) admet une unique solution.

Soit S_t un semi-groupe associé à A . Rappelons qu'à l'aide de l'expression de la solution U et du semi groupe contractant S_t

$$U(\mathbf{x}, t) = \int_0^t S_{t-s} F(\mathbf{x}, s) ds, \quad (1.143)$$

il est facile d'obtenir

$$\|U(\cdot, t)\|_H \leq \int_0^t \|F(\cdot, s)\|_H ds. \quad (1.144)$$

Comme $\|F(\cdot, t)\|_H = \|f(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$, nous obtenons sur $[0, t]$

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq t \max \|f(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.145)$$

Explicitons f , nous avons

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq t \max \|\partial_t^2 \tilde{a}(\cdot, t) - c^2 \Delta \tilde{a}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.146)$$

Or, nous avons

$$\|\partial_t^2 \tilde{a}(\cdot, t) - c^2 \Delta \tilde{a}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_t^2 \tilde{a}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} + c^2 \|\Delta \tilde{a}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \quad (1.147)$$

et $\|\Delta \tilde{a}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} = \|\tilde{a}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}$. Soit X un espace, introduisons l'espace de Sobolev

$$W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, X) = \{a \in L^\infty(\mathbb{R}^+, X), \forall p \leq 2, \exists C > 0 : \|\partial_t^p a(\cdot, t)\|_X \leq C\}. \quad (1.148)$$

Nous obtenons

$$\|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0 t \|\tilde{a}(\cdot, t)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))} \leq C_0 t \|a(\cdot, t)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\partial\Omega))}. \quad (1.149)$$

Comme $u = \tilde{u} + \tilde{a}$, il suit de l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} &\leq \|\tilde{u}(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\tilde{a}(\cdot, t)\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C_0 t \|a(\cdot, t)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\partial\Omega))} + C \|a(\cdot, t)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.150)$$

ii) Analyse

Dans cette partie, nous supposons que la solution est de la forme (1.128) et nous allons déterminer les $\lambda_{m,n}^{\text{pol}}$ qui vérifient la condition (1.129). Pour cela, commençons par traiter la condition à la limite en $r = r^*$

$$\sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{d_t^{n-\ell} \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t - \frac{r^*}{c}) - (-1)^{n-\ell} d_t^{n-\ell} \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t + \frac{r^*}{c})}{4\pi(r^*)^{\ell+1} c^{n-\ell}} = a_{m,n}^{\text{pol}}(t), \quad (1.151)$$

avec $a_{m,n}^{\text{pol}} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ les coefficients spectraux de la fonction a

$$a(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} a_{m,n}^{\text{pol}}(t) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \quad (1.152)$$

Nous posons le changement de variable $t' = t + \frac{r^*}{c}$ et nous obtenons

$$\sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{(-1)^{n-\ell} d_t^{n-\ell} \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t)}{4\pi(r^*)^{\ell+1} c^{n-\ell}} = \sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{d_t^{n-\ell} \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t - 2\frac{r^*}{c})}{4\pi(r^*)^{\ell+1} c^{n-\ell}} - a_{m,n}^{\text{pol}}(t - \frac{r^*}{c}). \quad (1.153)$$

Comme $\lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t) = 0$ pour $t < r^*/c$, l'équation (1.153) écrite pour $t \in [\frac{r^*}{c}, 2\frac{r^*}{c}]$ se simplifie en

$$\sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{(-1)^{n-\ell} d_t^{n-\ell} \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t)}{4\pi(r^*)^{\ell+1} c^{n-\ell}} = -a_{m,n}^{\text{pol}}(t - \frac{r^*}{c}). \quad (1.154)$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées ordinaires qui est bien posée quand nous l'équipons des conditions initiales (c'est une conséquence de (1.129))

$$d_t^\ell \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(\frac{r^*}{c}) = 0 \quad \forall \ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket. \quad (1.155)$$

Nous avons ainsi déterminé $\lambda_{m,n}^{\text{pol}}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ pour $t \leq 2\frac{r^*}{c}$.

Ensuite nous répétons le raisonnement et construisons $\lambda_{m,n}^{\text{pol}}$ par récurrence. Nous sommes au rang k . Cela signifie que les fonctions $\lambda_{m,n}^{\text{pol}}$ (et ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$) sont connues pour $t \leq (k+1)\frac{r^*}{c}$. L'équation (1.153) permet de déterminer $\lambda_{m,n}^{\text{pol}}$ pour $t \in [(k+1)\frac{r^*}{c}, (k+2)\frac{r^*}{c}]$, le membre de droite (1.153) étant devenu une donnée (car $t - \frac{2r^*}{c} \leq k\frac{r^*}{c}$). Par soucis de clarté, nous pouvons également écrire (1.153) sous la forme d'une équation linéaire avec terme source et condition initiale. Notons

$$L(t) = \begin{pmatrix} \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t) \\ d_t \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t) \\ \vdots \\ d_t^{n-1} \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

avec

$$a_\ell = -\frac{q_n^{n-\ell}}{q_n^0} \left(\frac{-c}{r^*}\right)^{n-\ell} \quad \text{et} \quad b(t) = \sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{d_t^{n-\ell} \lambda_{m,n}^{\text{pol}}(t - 2\frac{r^*}{c})}{4\pi(r^*)^{\ell+1} c^{n-\ell}} - a_{m,n}^{\text{pol}}(t - \frac{r^*}{c}).$$

Sur $[(k+1)\frac{r^*}{c}, (k+2)\frac{r^*}{c}]$ nous étudions

$$\begin{cases} d_t L(t) = AL(t) + B(t), \\ L((k+1)\frac{r^*}{c}) \quad \text{connu.} \end{cases} \quad (1.156)$$

Les conditions initiales de L sont connues sur l'intervalle $[(k+1)\frac{r^*}{c}, (k+2)\frac{r^*}{c}]$. Comme $b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, le problème (1.156) admet une unique solution d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Nous avons ainsi déterminé les fonctions $\lambda_{m,n}^{\text{pol}}$ et ses dérivées d'ordre au plus $n-1$ sur tout \mathbb{R} , car elles sont égales aux valeurs terminales de L sur $[(k+1)\frac{r^*}{c}, (k+2)\frac{r^*}{c}]$. C'est bien une fonction \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} .

iii) Convergence des séries

Dans la partie ii), les calculs ont été effectués pour

$$a(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} a_{m,n}^{\text{pol}}(t) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \quad (1.157)$$

Il reste à démontrer la convergence des séries pour démontrer le résultat. Dans le cas où a est une somme finie de pol_n^m , ce résultat formel devient rigoureux car la solution est elle aussi décrite à l'aide d'une somme finie. Définissons les sommes partielles u_N et a_N

$$\begin{cases} u_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} \text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda_{m,n}^{\text{pol}}](\mathbf{x}, t), \\ a_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} a_{m,n}^{\text{pol}}(t) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \end{cases} \quad (1.158)$$

Nous avons

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} a_N(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t) \quad \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_R) \quad (1.159)$$

Introduisons l'opérateur solution, que nous notons Sol. L'opérateur Sol associe à la fonction $a \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_R)$ la solution sur la boule u

$$\text{Sol}(a) = u(\mathbf{x}, t). \quad (1.160)$$

L'opérateur Sol est continu. Nous avons u_N qui est la solution associée à a_N

$$\text{Sol}(a_N) = u_N(\mathbf{x}, t). \quad (1.161)$$

Il suit

$$\text{Sol}(a - a_N) = u(\mathbf{x}, t) - u_N(\mathbf{x}, t). \quad (1.162)$$

Avec l'estimation (1.150) nous obtenons

$$\|u(\mathbf{x}, t) - u_N(\mathbf{x}, t)\|_{H^1(B_{r,*})} \leq C_0 t \|a(\mathbf{x}, t) - a_N(\mathbf{x}, t)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma_{r,*}))} + C \|a(\mathbf{x}, t) - a_N(\mathbf{x}, t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{r,*})}. \quad (1.163)$$

En passant à la limite sur N nous obtenons la convergence de u_N vers u . \square

1.3.4 La solution développée à l'ordre 2

Dans cette section, nous allons identifier deux formes que prend la solution régulière de l'équation des ondes : son développement de Taylor en 0 à l'ordre 2 et son développement dans la base

des $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}$ (décrite dans la section 1.3.3) également à l'ordre 2. Rappelons que $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, nous

avons u qui s'écrit sous les deux formes suivantes

$$\begin{cases} u(\mathbf{x}, t) &= u(\mathbf{0}, t) + \nabla u(\mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \cdot H(u(\mathbf{0}, t)) \cdot \mathbf{x} \\ u(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\text{pol}} R_{0,0}^{\text{pol}}[\lambda_{0,0}^{\text{pol}}] + R_{0,1}^{\text{pol}}[\lambda_{0,1}^{\text{pol}}] + R_{1,1}^{\text{pol}}[\lambda_{1,1}^{\text{pol}}] + R_{0,2}^{\text{pol}}[\lambda_{0,2}^{\text{pol}}] + R_{1,2}^{\text{pol}}[\lambda_{1,2}^{\text{pol}}] + R_{2,2}^{\text{pol}}[\lambda_{2,2}^{\text{pol}}]. \end{cases} \quad (1.164)$$

Répertorions les $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}$ pour $n \leq 2$ dans le tableau 1.7.

Détaillons le développement de Taylor de u

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= u(\mathbf{0}, t) + \partial_{x_1} u(\mathbf{0}, t) x_1 + \partial_{x_2} u(\mathbf{0}, t) x_2 + \partial_{x_3} u(\mathbf{0}, t) x_3 \\ &+ \frac{1}{2} (\partial_{x_1}^2 u(\mathbf{0}, t) x_1^2 + \partial_{x_2}^2 u(\mathbf{0}, t) x_2^2 + \partial_{x_3}^2 u(\mathbf{0}, t) x_3^2) \\ &+ \partial_{x_1 x_2} u(\mathbf{0}, t) x_1 x_2 + \partial_{x_1 x_3} u(\mathbf{0}, t) x_1 x_3 + \partial_{x_2 x_3} u(\mathbf{0}, t) x_2 x_3. \end{aligned}$$

Nous avons à présent le matériel nécessaire pour identifier les deux formes de u , nous obtenons

$$u(\mathbf{0}, t) = -\frac{(\lambda_{0,0}^{\cos})'(t)}{2\pi c}, \quad (1.165)$$

$$\nabla u(\mathbf{0}, t) = \frac{1}{4\pi c^3} \begin{pmatrix} -(\lambda_{1,1}^{\cos})^{(3)}(t) \\ -(\lambda_{1,1}^{\sin})^{(3)}(t) \\ (\lambda_{0,1}^{\cos})^{(3)}(t) \end{pmatrix}, \quad (1.166)$$

n	m	$\text{Reg}_{m,n}^{\cos}[\lambda_{m,n}^{\cos}]$	$\text{Reg}_{m,n}^{\sin}[\lambda_{m,n}^{\sin}]$
0	0	$-\frac{(\lambda_{0,0}^{\cos})'(t)}{2\pi c} - \frac{(\lambda_{0,0}^{\cos})^{(3)}(t)}{12\pi c^3}r^2 + o_{r \rightarrow 0}(r^2)$	0
1	0	$\frac{(\lambda_{0,1}^{\cos})^{(3)}(t)}{6\pi c^3}x_3 + o_{r \rightarrow 0}(r^2)$	0
	1	$-\frac{(\lambda_{1,1}^{\cos})^{(3)}(t)}{6\pi c^3}x_1 + o_{r \rightarrow 0}(r^2)$	$-\frac{(\lambda_{1,1}^{\sin})^{(3)}(t)}{6\pi c^3}x_2 + o_{r \rightarrow 0}(r^2)$
2	0	$-\frac{(\lambda_{0,2}^{\cos})^{(5)}(t)}{20\pi c^5}x_3^2 + \frac{(\lambda_{0,2}^{\cos})^{(5)}(t)}{20\pi c^5}r^2 + o_{r \rightarrow 0}(r^2)$	0
	1	$\frac{(\lambda_{1,2}^{\cos})^{(5)}(t)}{10\pi c^5}x_1x_3 + o_{r \rightarrow 0}(r^2)$	$\frac{(\lambda_{1,2}^{\sin})^{(5)}(t)}{10\pi c^5}x_2x_3 + o_{r \rightarrow 0}(r^2)$
	2	$-\frac{(\lambda_{2,2}^{\cos})^{(5)}(t)}{10\pi c^5}(x_1^2 - x_2^2) + o_{r \rightarrow 0}(r^2)$	$-\frac{(\lambda_{2,2}^{\sin})^{(5)}(t)}{5\pi c^5}x_1x_2 + o_{r \rightarrow 0}(r^2)$

Tableau 1.7 – Les premiers $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda_{m,n}^{\text{pol}}]$ avec $n \leq 2$

et enfin

$$H(u(\mathbf{0}, t)) = \frac{1}{10\pi c^5} \begin{pmatrix} -2(\lambda_{2,2}^{\cos})^{(5)}(t) & -2(\lambda_{2,2}^{\sin})^{(5)}(t) & (\lambda_{1,2}^{\cos})^{(5)}(t) \\ -2(\lambda_{2,2}^{\sin})^{(5)}(t) & 2(\lambda_{2,2}^{\cos})^{(5)}(t) & (\lambda_{1,2}^{\sin})^{(5)}(t) \\ (\lambda_{1,2}^{\cos})^{(5)}(t) & (\lambda_{1,2}^{\sin})^{(5)}(t) & -(\lambda_{0,2}^{\cos})^{(5)}(t) \end{pmatrix} + \left(\frac{-(\lambda_{0,0}^{\cos})^{(3)}(t)}{6\pi c^3} + \frac{(\lambda_{0,2}^{\cos})^{(5)}(t)}{10\pi c^5} \right) I. \quad (1.167)$$

1.4 Étude des solutions singulières de l'équation des ondes

1.4.1 Solution de l'équation des ondes sur une couronne solide

Problème sur la couronne

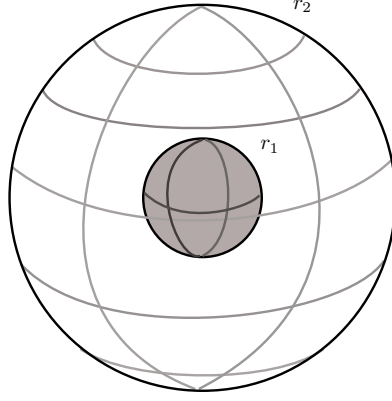
Dans cette partie, nous allons déterminer la solution de l'équation des ondes sur une couronne solide (de petit rayon r_1 et de grand rayon r_2), voir la figure 1.1.

$$C_{r_1}^{r_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, r_1 \leq |\mathbf{x}| \leq r_2\}. \quad (1.168)$$

Nous noterons u_c la solution de ce problème (c référant à couronne). Nous considérerons une solution causale $u_c(\mathbf{x}, t) = 0$ pour les temps négatifs dont nous connaissons la trace sur la frontière de la couronne $C_{r_1}^{r_2}$. Nous noterons les sphères de rayon r_1 , respectivement r_2 sous la forme suivante

$$\Gamma_{r_1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = r_1\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{r_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, |\mathbf{x}| = r_2\}. \quad (1.169)$$

Nous voulons résoudre le problème (1.170). Cherchons $u_c \in \mathcal{C}^\infty(C_{r_1}^{r_2} \times \mathbb{R})$ tel que

FIGURE 1.1 – Domaine en couronne considéré (entre la boule de rayon r_1 et celle de rayon r_2)

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 \Delta u_c(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_c(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{sur } C_{r_1}^{r_2}, \\ u_c(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall t < 0, \\ u_{\Gamma_{r_1}}(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t), \\ u_{\Gamma_{r_2}}(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t), \end{array} \right. \quad (1.170)$$

avec $a \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_{r_1} \times \mathbb{R})$ et $b \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_{r_2} \times \mathbb{R})$.

i) Caractère bien posé de l'équation des ondes sur la couronne $C_{r_1}^{r_2}$

Ce problème admet une unique solution qui est régulière dans la couronne $C_{r_1}^{r_2}$. Comme pour la boule de rayon R , il est possible de montrer l'existence et l'unicité du problème (1.170) grâce au théorème de Hille-Yosida. Rappelons le problème considéré

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u_c(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta u_c(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in C_{r_1}^{r_2} \text{ et } t \geq 0, \\ u_c(\mathbf{x}, t) = 0, & \forall t < 0, \\ u_c(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_{r_1} \text{ et } t \geq 0, \\ u_c(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_{r_2} \text{ et } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (1.171)$$

avec a et b des fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Gamma_{r_1} \times \mathbb{R})$, respectivement $\mathcal{C}^\infty(\Gamma_{r_2} \times \mathbb{R})$.

Remarque 1.20. Nous avons équivalence entre les conditions du problème (1.171) avec les conditions initiales $u_c(\mathbf{x}, 0) = 0$ et $\partial_t u_c(\mathbf{x}, 0) = 0$.

Nous relevons tout d'abord la fonction a en \tilde{a} , respectivement b en \tilde{b} comme suit : soit $\tilde{a} \in$

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$, respectivement l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \Delta \tilde{a}(\mathbf{x}, t) - \tilde{a}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{dans } C_{r_1}^{r_2} \\ \tilde{a}(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t) & \text{sur } \Gamma_{r_1} \\ \tilde{a}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_{r_2}, \end{cases} \quad (1.172)$$

respectivement

$$\begin{cases} \Delta \tilde{b}(\mathbf{x}, t) - \tilde{b}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{dans } C_{r_1}^{r_2} \\ \tilde{b}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_{r_1}, \\ \tilde{b}(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t) & \text{sur } \Gamma_{r_2}. \end{cases} \quad (1.173)$$

Posons $\tilde{u}_c(\mathbf{x}, t) = u_c(\mathbf{x}, t) - \tilde{a}(\mathbf{x}, t) - \tilde{b}(\mathbf{x}, t)$. Pour démontrer l'existence et l'unicité de u , commençons par démontrer l'existence et l'unicité de \tilde{u} . Nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u}_c(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta \tilde{u}_c(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in C_{r_1}^{r_2} \text{ et } t \geq 0, \\ \partial_t \tilde{u}_c(\mathbf{x}, 0) = \tilde{u}_c(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in C_{r_1}^{r_2}, \\ \tilde{u}_c(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_{r_1} \cup \Gamma_{r_2} \text{ et } t \geq 0, \\ \tilde{u}_c(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in C_{r_1}^{r_2} \text{ et } t \leq 0. \end{cases} \quad (1.174)$$

avec $f(\mathbf{x}, t) = -\partial_t^2(\tilde{a} + \tilde{b})(\mathbf{x}, t) + c^2 \Delta(\tilde{a} + \tilde{b})(\mathbf{x}, t)$. Posons $F(\mathbf{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$, $U_c(\mathbf{x}, t) =$

$\begin{pmatrix} \tilde{u}_c(\mathbf{x}, t) \\ \partial_t \tilde{u}_c(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 \Delta & 0 \end{pmatrix}$. Nous obtenons

$$\begin{cases} \partial_t U_c(\mathbf{x}, t) + AU_c(\mathbf{x}, t) = F(\mathbf{x}, t), & \text{pour } \mathbf{x} \in C_{r_1}^{r_2} \text{ et } t \geq 0, \\ U_c(\mathbf{x}, 0) = 0, & \text{pour } \mathbf{x} \in C_{r_1}^{r_2}. \end{cases} \quad (1.175)$$

Soit $V(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in H$, avec $H = H_0^1(C_{r_1}^{r_2}) \times L^2(C_{r_1}^{r_2})$. Munissons $H_0^1(C_{r_1}^{r_2})$ du produit scalaire

$$(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))_{H_0^1(C_{r_1}^{r_2})} = \int_{C_{r_1}^{r_2}} c^2 \nabla u_1(\mathbf{x}, t) \nabla u_2(\mathbf{x}, t) d\sigma_{\mathbf{x}}. \quad (1.176)$$

Il suit $D(A) := \{V(\mathbf{x}) \in H, AV(\mathbf{x}) \in H\} = H_{\text{dir}}^2(C_{r_1}^{r_2}) \times H_0^1(C_{r_1}^{r_2})$, avec $H_{\text{dir}}^2(C_{r_1}^{r_2}) = H^2(\mathbb{R}^3) \cap H_0^1(C_{r_1}^{r_2})$. Nous avons donc A qui est un opérateur non borné de $D(A) \subset H$ vers H . Nous avons

alors

$$\begin{aligned} (AV(\mathbf{x}), V(\mathbf{x}))_H &= \begin{pmatrix} -u_2(\mathbf{x}) \\ -c^2 \Delta u_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &= -(u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))_{H_0^1(C_{r_1}^{r_2})} - (c^2 \Delta u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))_{L^2(C_{r_1}^{r_2})}. \end{aligned}$$

Il suit que $(AV(\mathbf{x}), V(\mathbf{x}))_H = 0$. A est donc monotone. Voyons si A est maximal, prenons $V \in D(A)$

$$\text{et } G(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \in H$$

$$(A + I)V(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x}), \quad (1.177)$$

est équivalent à

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}) - u_2(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) \\ u_2(\mathbf{x}) - c^2 \Delta u_1(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (1.178)$$

La première équation donne u_1 et $u_2 \in H_0^1(C_{r_1}^{r_2})$ car $f_1 \in H_0^1(C_{r_1}^{r_2})$. La seconde se simplifie en

$$u_1(\mathbf{x}) - c^2 \Delta u_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x}) + f_2(\mathbf{x}). \quad (1.179)$$

Ceci implique à u_1 d'appartenir à $H_{\text{dir}}^2(C_{r_1}^{r_2})$. Donc $\forall G \in H$, nous avons trouvé un unique V appartenant à $D(A)$ tel que $(A + I)V(\mathbf{x}) = G(\mathbf{x})$. A est donc maximal monotone.

D'après le théorème de Hille-Yosida, le problème (1.175) admet une unique solution.

Soit S_t un semi-groupe associé à A . Soit

$$U(\mathbf{x}, t) = \int_0^t S_{t-s} F(\mathbf{x}, s) ds, \quad (1.180)$$

nous avons

$$\|U(\cdot, t)\|_H \leq C \int_0^t \|F(\cdot, s)\|_H ds, \quad C > 0. \quad (1.181)$$

Or ici $\|F(\cdot, t)\|_H = \|f(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})}$. Nous obtenons sur $[0, t]$

$$\|\tilde{u}_c(\cdot, t)\|_{H_0^1(C_{r_1}^{r_2})} \leq t \max \|f(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})}. \quad (1.182)$$

Explicitons f , nous avons

$$\|\tilde{u}_c(\cdot, t)\|_{H_0^1(C_{r_1}^{r_2})} \leq C t \max \|\partial_t^2(\tilde{a} + \tilde{b})(\cdot, t) - c^2 \Delta(\tilde{a} + \tilde{b})(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})}. \quad (1.183)$$

Or, nous avons

$$\|\partial_t^2(\tilde{a} + \tilde{b})(\cdot, t) - c^2 \Delta(\tilde{a} + \tilde{b})(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})} \leq C(1 + c^2)(\|\partial_t^2 \tilde{a}(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})} + \|\partial_t^2 \tilde{b}(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})}) \quad (1.184)$$

car $\|\Delta \tilde{a}(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})} = \|\tilde{a}(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})}$ et respectivement $\|\Delta \tilde{b}(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})} = \|\tilde{b}(\cdot, t)\|_{L^2(C_{r_1}^{r_2})}$. Rappelons l'espace de Sobolev

$$W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, X) = \{a \in L^\infty(\mathbb{R}^+, X), \forall p \leq 2, \exists C > 0 : \|\partial_t^p a(\cdot, t)\|_X \leq C\}, \quad (1.185)$$

avec $X = H^{1/2}(\Gamma_{r_1})$, $H^{1/2}(\Gamma_{r_2})$, ou $L^2(C_{r_1}^{r_2})$. Nous obtenons pour $C_0 > 0$

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_c(\cdot, t)\|_{H_0^1(C_{r_1}^{r_2})} &\leq C_0 t \|\tilde{a}(\cdot, t) + \tilde{b}(\cdot, t)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, L^2(C_{r_1}^{r_2}))} \\ &\leq C_0 t (\|a(\cdot, t)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma_{r_1}))} + \|b(\cdot, t)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma_{r_2}))}). \end{aligned}$$

Nous obtenons pour $C_0 > 0$ et $C_1 > 0$

$$\begin{aligned} \|u_c(\cdot, t)\|_{H^1(C_{r_1}^{r_2})} &\leq C_0 \|\tilde{u}_c(\cdot, t)\|_{H_0^1(C_{r_1}^{r_2})} + C_1 \|\tilde{a}(\cdot, t) + \tilde{b}(\cdot, t)\|_{H_0^1(C_{r_1}^{r_2})} \\ &\leq C_0 t (\|a(\cdot, t)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma_{r_1}))} + \|b(\cdot, t)\|_{W^{2,\infty}(\mathbb{R}^+, H^{1/2}(\Gamma_{r_2}))}) \\ &\quad + C_1 (\|a(\cdot, t)\|_{H^{1/2}(\Gamma_{r_1})} + \|b(\cdot, t)\|_{H^{1/2}(\Gamma_{r_2})}). \end{aligned} \quad (1.186)$$

ii) Analyse

Comme pour les solutions régulières, nous combinons une solution avancée et une solution retardée, voir la section 1.3.2. Nous cherchons donc une solution du problème (1.170) dans la base des $M_{m,n}^{\text{pol},\pm}$ (donnés par (1.109)) sous la forme

$$u_c(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},-} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t^-) + M_{m,n}^{\text{pol},+} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^+) \quad (1.187)$$

avec pol qui prend les valeurs cos ou sin et $\lambda_{m,n}^{\text{pol},\pm}$ les projections dans la base des $M_{m,n}^{\text{pol},\pm}$ d'une fonction $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ à déterminer. En comparant avec les décompositions $a_{m,n}^{\text{pol}}$, respectivement $b_{m,n}^{\text{pol}}$ de a , respectivement b

$$\begin{cases} a(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} a_{m,n}^{\text{pol}}(r, t) \text{pol}_m^n(\theta, \varphi) \\ b(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} b_{m,n}^{\text{pol}}(r, t) \text{pol}_m^n(\theta, \varphi), \end{cases} \quad (1.188)$$

nous obtenons les relations suivantes qui traduisent les troisièmes et quatrièmes lignes de (1.170)

$$\begin{cases} a_{m,n}^{\text{pol}}(\mathbf{x}, t) = M_{m,n}^{\text{pol},+} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t + \frac{r_1}{c}) + M_{m,n}^{\text{pol},-} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t - \frac{r_1}{c}) & \text{sur } \Gamma_{r_1}, \\ b_{m,n}^{\text{pol}}(\mathbf{x}, t) = M_{m,n}^{\text{pol},+} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t + \frac{r_2}{c}) + M_{m,n}^{\text{pol},-} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t - \frac{r_2}{c}) & \text{sur } \Gamma_{r_2}. \end{cases} \quad (1.189)$$

Notation 1.3. Nous notons

$$\sum_{m,n,\text{pol}} \lambda_{m,n}^{\text{pol}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} \lambda_{m,n}^{\text{pol}}. \quad (1.190)$$

Nous remarquons alors que la décomposition de u_c en $M_{m,n}^{\text{pol},+} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}]$ et $M_{m,n}^{\text{pol},-} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}]$ n'est pas unique. Plus précisément, les fonctions $\lambda_{m,n}^{\text{pol},\pm}$ sont définies à un polynôme près. Pour assurer l'unicité, nous imposons que les fonctions $(\mathbf{x}, t) \mapsto \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},+} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^+)$ et $(\mathbf{x}, t) \mapsto$

$\sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},-} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t^-)$ soient nulles pour les temps négatifs sur $C_{r_1}^{r_2}$. Cette contrainte est assurée par

$$\begin{cases} M_{m,n}^{\text{pol},+} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^+) = 0, & \text{pour } t^+ \leq \frac{r_2}{c}, \\ M_{m,n}^{\text{pol},-} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t^-) = 0, & \text{pour } t^- \leq -\frac{r_1}{c}. \end{cases} \quad (1.191)$$

Nous allons maintenant déterminer $M_{m,n}^{\text{pol},+} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}]$, $M_{m,n}^{\text{pol},-} [\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}]$ par intervalle de temps $\delta_t =$

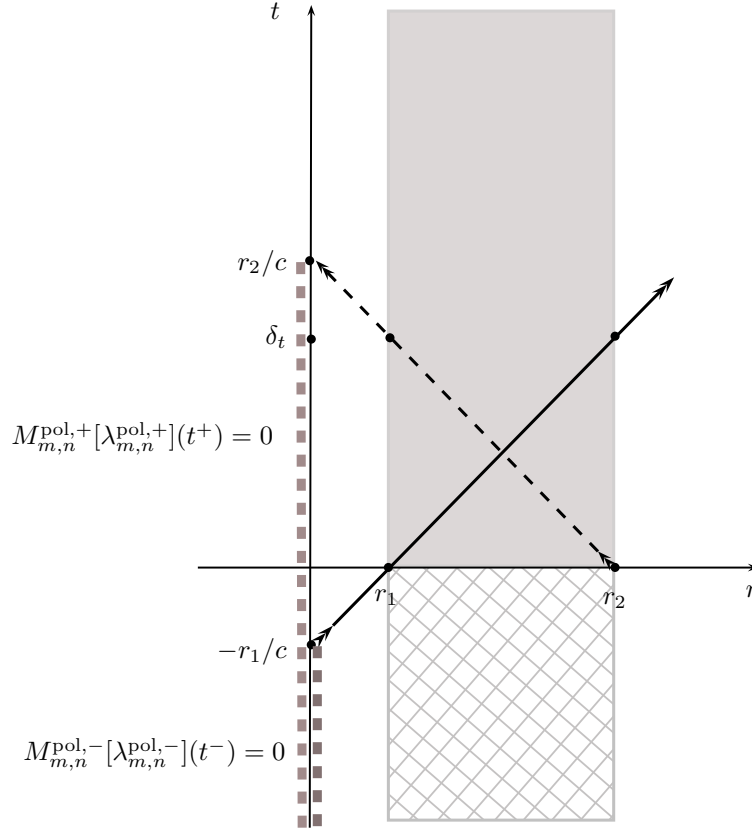


FIGURE 1.2 – Potentiels avancés et retardés

$\frac{r_2 - r_1}{c}$. Effectuons le changement de variable $t_1 = t - \frac{r_1}{c}$, respectivement $t_2 = t + \frac{r_2}{c}$, dans la première ligne, respectivement dans la deuxième ligne de (1.189)

$$\begin{cases} M_{m,n}^{pol,-}[\lambda_{m,n}^{pol,-}](\mathbf{x}, t_1) &= a_{m,n}^{pol}(\mathbf{x}, t_1 + \frac{r_1}{c}) - M_{m,n}^{pol,+}[\lambda_{m,n}^{pol,+}](\mathbf{x}, t_1 + \frac{2r_1}{c}) & \text{sur } \Gamma_{r_1}, \\ M_{m,n}^{pol,+}[\lambda_{m,n}^{pol,+}](\mathbf{x}, t_2) &= b_{m,n}^{pol}(\mathbf{x}, t_2 - \frac{r_2}{c}) - M_{m,n}^{pol,-}[\lambda_{m,n}^{pol,-}](t_2 - \frac{2r_2}{c}) & \text{sur } \Gamma_{r_2}. \end{cases} \quad (1.192)$$

Comme pour le cas de la boule B_{r^*} (voir section 1.3.3), nous effectuons ce changement de variable afin que les termes à gauche de (1.192) deviennent des données. Cette fois-ci nous raisonnerons directement sur les $M_{m,n}^{pol,\pm}$ et déterminerons les $\lambda_{m,n}^{pol,\pm}$ ensuite. En effet, pour $t_1 \in [\frac{-r_1}{c}, \frac{-r_1}{c} + \delta_t]$, la fonction $M_{m,n}^{pol,+}[\lambda_{m,n}^{pol,+}](\mathbf{x}, t_1 + \frac{2r_1}{c})$ est identiquement nulle d'après (1.191). De même $M_{m,n}^{pol,-}[\lambda_{m,n}^{pol,-}](\mathbf{x}, t_2 - \frac{2r_2}{c}) = 0$ pour $t_2 \in [\frac{r_2}{c}, \frac{r_2}{c} + \delta_t]$. Il suit que pour $t_1 \in [\frac{-r_1}{c}, \frac{-r_1}{c} + \delta_t]$ et pour $t_2 \in [\frac{r_2}{c}, \frac{r_2}{c} + \delta_t]$

$$\begin{cases} M_{m,n}^{pol,-}[\lambda_{m,n}^{pol,-}](\mathbf{x}, t_1) &= a_{m,n}^{pol}(\mathbf{x}, t_1 + \frac{r_1}{c}) & \text{sur } \Gamma_{r_1}, \\ M_{m,n}^{pol,+}[\lambda_{m,n}^{pol,+}](\mathbf{x}, t_2) &= b_{m,n}^{pol}(\mathbf{x}, t_2 - \frac{r_2}{c}) & \text{sur } \Gamma_{r_2}. \end{cases} \quad (1.193)$$

Nous avons ainsi avancé de δt dans la détermination de λ^+ et λ^- . Le raisonnement peut être ainsi répété par récurrence.

Soit k un entier naturel. Supposons connus $M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t_1)$ et $M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t_2)$ pour $t_1 \leq -\frac{r_1}{c} + k\delta t$ et $t_2 \leq \frac{r_2}{c} + k\delta t$.

Pour $t_1 \in [-\frac{r_1}{c} + n\delta t, -\frac{r_1}{c} + (k+1)\delta t]$ et $t_2 \in [\frac{r_2}{c} + k\delta t, \frac{r_2}{c} + (k+1)\delta t]$, les fonctions $M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t_1 + \frac{2r_1}{c})$ et $M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t_2 - \frac{2r_2}{c})$ sont ainsi connues d'après l'hypothèse. Il suit de (1.189) que nous avons déterminé $M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t_1)$ et $M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t_2)$ pour $t_1 \in [-\frac{r_1}{c} + k\delta t, -\frac{r_1}{c} + (k+1)\delta t]$ et $t_2 \in [\frac{r_2}{c} + k\delta t, \frac{r_2}{c} + (k+1)\delta t]$. Nous venons de déterminer $M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t_1)$ et $M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t_2)$ sur tout \mathbb{R} .

Nous déterminons alors les $\lambda_{m,n}^{\text{pol},\pm}(t^\pm)$ en résolvant les équations aux dérivées ordinaires (1.194) munies de la condition de causalité (qui équivaut à imposer la nullité des $n-1$ premières dérivées de $\lambda_{m,n}^{\text{pol},\pm}(t^\pm)$ en $t^+ = t + \frac{r_2}{c}$ et $t^- = t - \frac{r_1}{c}$).

$$\begin{cases} M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^+) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{(-1)^{n-\ell} \partial_t^{n-\ell} \lambda_{m,n}^{\text{pol},+}(t^+)}{r^{\ell+1} c^{n-\ell}} \text{pol}_n^m, \\ M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t^-) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{\partial_t^{n-\ell} \lambda_{m,n}^{\text{pol},-}(t^-)}{r^{\ell+1} c^{n-\ell}} \text{pol}_n^m. \end{cases} \quad (1.194)$$

iii) Convergence des séries

Dans la section 1.4.1, les calculs ont été effectués de manière formelle. Il reste à démontrer la convergence des séries pour démontrer le résultat. Dans le cas où a et b sont des sommes finies de pol_n^m , ce résultat formel devient rigoureux car la solution est elle aussi décrite à l'aide d'une somme finie. Définissons les sommes partielles u_{cN} , a_N et b_N

$$\begin{cases} u_{cN}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^+) + M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t^-) \\ a_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} a_{m,n}^{\text{pol}}(\mathbf{x}, t) \\ b_N(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} b_{m,n}^{\text{pol}}(\mathbf{x}, t). \end{cases} \quad (1.195)$$

Nous avons

$$\begin{cases} \lim_{N \rightarrow +\infty} a_N(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t) & \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{r_1}) \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} b_N(\mathbf{x}, t) = b(\mathbf{x}, t) & \text{dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{r_2}). \end{cases} \quad (1.196)$$

Introduisons l'opérateur solution, que nous notons Sol. L'opérateur Sol associe à deux fonctions $a \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_{r_1})$ et $b \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_{r_2})$ la solution sur la couronne u_c

$$\text{Sol}(a, b) = u_c(\mathbf{x}, t). \quad (1.197)$$

Lemme 1.5. *L'opérateur Sol : $W^{2,\infty}([0, T], H^{1/2}(\Gamma_{r_1})) \times W^{2,\infty}([0, T], H^{1/2}(\Gamma_{r_2})) \rightarrow L^\infty([0, T], H^1(C_{r_1}^{r_2}))$ est continu, pour tout $T > 0$.*

Preuve du lemme 1.5. La continuité de l'opérateur Sol découle de l'estimation obtenue en (1.186). \square

Revenons à la convergence des séries. Nous avons u_{cN} qui est la solution associée à a_N et b_N

$$\text{Sol}(a_N, b_N) = u_{cN}(\mathbf{x}, t). \quad (1.198)$$

Il suit

$$\text{Sol}(a - a_N, b - b_N) = u_c(\mathbf{x}, t) - u_{cN}(\mathbf{x}, t). \quad (1.199)$$

Avec l'estimation (1.186) nous obtenons

$$\|u_c(\mathbf{x}, t) - u_{cN}(\mathbf{x}, t)\|_{H^1(C_{r_1}^{r_2})} \leq C\|a(\mathbf{x}, t) - a_N(\mathbf{x}, t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{r_1})} + C_2\|b(\mathbf{x}, t) - b_N(\mathbf{x}, t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{r_2})}. \quad (1.200)$$

En passant à la limite sur N , nous obtenons la convergence de u_{cN} vers u .

1.4.2 Représentation des solutions singulières de l'équation des ondes

Dans la section 1.4.1, nous avons décrit la solution u_c dans une couronne privée de l'origine car la somme des $M_{m,n}^{\text{pol},+}$ et $M_{m,n}^{\text{pol},-}$ est singulière en $\mathbf{0}$. Cela définit par conséquent une base pour les solutions singulières de l'équation des ondes. Notons u_s la solution singulière qui s'exprime dans cette base de la façon suivante

$$u_s(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^+) + M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t^-). \quad (1.201)$$

Nous avons également en notant $u_{m,n}^{\text{pol}}$ les décompositions spectrales de u_s

$$u_s(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} u_{m,n}^{\text{pol}}(\mathbf{x}, t), \quad (1.202)$$

avec $u_{m,n}^{\text{pol}}(\mathbf{x}, t) = M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^+) + M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t^-)$.

Le théorème 1.5 permet d'écrire la solution de l'équation des ondes u_s dans une nouvelle base.

Théorème 1.5. *Nous avons les comportements suivants au voisinage de $\mathbf{x} = 0$*

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda](\mathbf{x}, t^-) = \sum_{p=-n-1}^P M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda](\theta, \varphi, t) r^p + O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1}), \\ \text{ii)} \quad & \text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \sum_{\substack{p=n \\ p \equiv n \pmod{2}}}^P \text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda](t) r^p + O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1}), \\ \text{iii)} \quad & u_s(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \left[\sum_{p=-n-1}^P M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\beta_{m,n}^{\text{pol}}](\theta, \varphi, t) r^p - \sum_{\substack{p=n \\ p \equiv n \pmod{2}}}^P \text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\theta, \varphi, t) r^p \right] \\ & + O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1}). \end{aligned}$$

Preuve. i) Par définition nous avons

$$M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda](\mathbf{x}, t^-) = \sum_{\ell=0}^n q_n^\ell \frac{\lambda^{(n-\ell)}(t^-)}{4\pi r^{\ell+1} c^{n-\ell}} \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \quad (1.203)$$

Effectuons un développement de Taylor

$$M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda](\mathbf{x}, t^-) = \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=0}^K q_n^\ell \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\lambda^{(n-\ell+k)}(t)}{4\pi c^{n-\ell+k}} r^{-\ell-1+k} \text{pol}_n^m(\theta, \varphi) + O_{r \rightarrow 0}(r^{K-n}). \quad (1.204)$$

Après le changement de variable $p = -\ell - 1 + k$ et $P = K - n - 1$ nous obtenons

$$M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda](\mathbf{x}, t^-) = \sum_{p=-n-1}^P \left(\sum_{\ell=\max(0, -1-p)}^n q_n^\ell \frac{(-1)^{p+\ell+1}}{(p+\ell+1)!} \frac{\lambda^{(n+p+1)}(t)}{4\pi c^{n+p+1}} \text{pol}_n^m(\theta, \varphi) \right) r^p + O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1}). \quad (1.205)$$

Notons $M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda]$ les éléments du développement de Taylor de $M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda]$

$$M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda](\theta, \varphi, t) = \sum_{k=\max(0, -1-p)}^n q_n^k \frac{(-1)^{p+k+1}}{(p+k+1)!} \frac{\lambda^{(n+p+1)}(t)}{4\pi c^{n+p+1}} \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \quad (1.206)$$

Nous obtenons finalement

$$M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda](\mathbf{x}, t^-) = \sum_{p=-n-1}^P M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda](\theta, \varphi, t) r^p + O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1}). \quad (1.207)$$

ii) Par définition (voir (1.124)) nous avons

$$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \frac{r^n}{2\pi} \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^K r^k \frac{\lambda^{(k+1+2n)}(t)}{c^{k+1+2n}} Q_n^{-k-1}(-1) \right) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi) + O_{r \rightarrow 0}(r^{K+n+1}). \quad (1.208)$$

Après le changement de variable $p = n + k$ et $P = n + K$ nous obtenons

$$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{p=n \\ p \equiv n \pmod{2}}}^P \left(\frac{\lambda^{(p+n+1)}(t)}{c^{p+n+1}} Q_n^{-p+n-1}(-1) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi) \right) r^p + O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1}). \quad (1.209)$$

Notons $\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda]$ les éléments du développement de Taylor de $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda]$.

Pour p et n de même parité :

$$\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda](\theta, \varphi, t) = \frac{\lambda^{(p+n+1)}(t)}{2\pi c^{p+n+1}} Q_n^{-p+n-1}(-1) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \quad (1.210)$$

Pour p et n de parité différente :

$$\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda](\theta, \varphi, t) = 0. \quad (1.211)$$

Nous obtenons finalement

$$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t) = \sum_{p=n}^P \text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda](\theta, \varphi, t) r^p + O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1}). \quad (1.212)$$

iii) Remarquons que $R_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda](\mathbf{x}, t) = M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda](\mathbf{x}, t^-) - M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda](\mathbf{x}, t^+)$. Nous partons de l'expression (1.201) de la solution u_s et nous allons l'écrire dans une autre base en ajoutant et retirant $M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}]$ à chacun des termes de (1.201)

$$u_s(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t^-) + M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^-) \quad (1.213)$$

$$- M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^-) + M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t^+) \quad (1.214)$$

$$= \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+} + \lambda_{m,n}^{\text{pol},-}](\mathbf{x}, t^-) - \text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t). \quad (1.215)$$

Notons $\beta_{m,n}^{\text{pol}} = \lambda_{m,n}^{\text{pol},+} + \lambda_{m,n}^{\text{pol},-}$. En utilisant i) et ii), nous obtenons iii). Il suit

$$u_{s,n}^{\text{pol}}(\mathbf{x}, t) = M_{m,n}^{\text{pol},-}[\beta_{m,n}^{\text{pol}}](\mathbf{x}, t^-) - \text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda_{m,n}^{\text{pol},+}](\mathbf{x}, t). \quad (1.216)$$

Ceci termine la preuve. \square

Remarque 1.21 (importante). *Le théorème 1.5 est fondamental pour la suite car il permet de décrire le comportement de la solution en champs lointain, nous réutiliserons cette décomposition dans le chapitre 3.*

1.5 Rappels des résultats obtenus

Afin de permettre une lecture plus fluide nous synthétisons les résultats obtenus et énonçons quelques corollaires.

1.5.1 Développement modal

Rappelons que B_{r^*} est la boule centrée en l'origine et de rayon r^* .

Théorème 1.6. *Toute solution u de l'équation des ondes sur $B_{r^*} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^+$*

$$\begin{cases} \square u(\mathbf{x}, t) = 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \partial_t u(\mathbf{x}, 0) = 0, \end{cases} \quad (1.217)$$

peut s'écrire sous la forme

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},-}[a_{m,n}^{\text{pol}}] + \text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[b_{m,n}^{\text{pol}}], \quad (1.218)$$

et se développer au voisinage de 0 sous la forme

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_p r^p (\widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[a_{m,n}^{\text{pol}}] + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[b_{m,n}^{\text{pol}}]) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi), \quad (1.219)$$

avec

$$\begin{cases} M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda] = \widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda] \text{pol}_n^m(\theta, \varphi), \\ \text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda] = \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda] \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \end{cases} \quad (1.220)$$

Corollaire 1.1. *Si u est solution de*

$$\begin{cases} \square u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^+, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \partial_t u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \text{sur } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \end{cases} \quad (1.221)$$

alors

$$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[b_{m,n}^{\text{pol}}] = 0, \quad (1.222)$$

c'est à dire

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},-}[a_{m,n}^{\text{pol}}], \quad (1.223)$$

et peut se développer au voisinage de 0 sous la forme

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_p r^p \widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[a_{m,n}^{\text{pol}}] \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \quad (1.224)$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[b_{m,n}^{\text{pol}}]$ est non identiquement nul en l'origine. \square

Corollaire 1.2. *Si u est solution sur $B_{r^*} \times \mathbb{R}^+$ (incluant l'origine) de*

$$\begin{cases} \square u(\mathbf{x}, t) = 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0, \partial_t u(\mathbf{x}, 0) = 0, \end{cases} \quad (1.225)$$

alors

$$M_{m,n}^{\text{pol},-}[a_{m,n}^{\text{pol}}] = 0, \quad (1.226)$$

c'est à dire

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[b_{m,n}^{\text{pol}}], \quad (1.227)$$

et peut se développer au voisinage de $\mathbf{0}$ sous la forme

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_p r^p \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[b_{m,n}^{\text{pol}}] \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \quad (1.228)$$

1.5.2 Développement asymptotique

Lemme 1.6. *La fonction u admet la décomposition suivante*

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=-\infty}^P (r^p u_p(\theta, \varphi, t)) + u^P(\mathbf{x}, t), \quad (1.229)$$

avec u^P le reste vérifiant

$$\begin{aligned} \max_{t \leq T} |u^P(\mathbf{x}, t)| &= O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1}), \\ \max_{t \leq T} |\nabla u^P(\mathbf{x}, t)| &= O_{r \rightarrow 0}(r^P). \end{aligned}$$

De plus, la fonction u_p admet la décomposition suivante

$$u_p(\theta, \varphi, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} (u_p)_{m,n}^{\text{pol}}(t) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi), \quad (1.230)$$

avec

$$(u_p)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = \widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[a_{m,n}^{\text{pol}}] + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[b_{m,n}^{\text{pol}}]. \quad (1.231)$$

D'autre part, elle se développe au voisinage de $\mathbf{0}$ sous la forme

$$u(\mathbf{x}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_p r^p (u_p)_{m,n}^{\text{pol}}(t) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi), \quad (1.232)$$

avec

$$(u_p)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = \widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[a_{m,n}^{\text{pol}}] + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[b_{m,n}^{\text{pol}}]. \quad (1.233)$$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé le développement modal de la solution en champ lointain. Nous nous sommes basés sur des résultats existants en fréquentiel pour les adapter au domaine temporel. Notre contribution majeure réside dans la simplification des expressions. Pour se faire, nous avons défini des bases de représentation de la solution adaptées au problème considéré ($\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}, M_{m,n}^{\text{pol},-}, M_{m,n}^{\text{pol},+}$). Ces expressions restent toutefois assez lourdes. Ce chapitre permet de faciliter l'étape de raccord qui sera réalisée au chapitre 3.

Chapitre 2

Éléments d'analyse pour l'étude en champ proche : modèle quasi-statique à l'extérieur d'un obstacle

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous isolons un certain nombre de résultats d'analyse concernant le champ proche. Bien que cette partie soit assez difficile à lire, elle permet d'avoir une présentation plus directe dans les chapitres suivants.

Nous nous plaçons à l'extérieur d'un obstacle $\widehat{B} \subset \mathbb{R}^3$ sur le domaine $\widehat{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{B}$, voir la figure 2.1. Bien que la théorie puisse aussi être développée dans le cas d'un obstacle moins régulier, par exemple de type Lipschitz, nous allons supposer que l'obstacle est de classe \mathcal{C}^∞ . Ainsi les fonctions considérées seront aussi de classe \mathcal{C}^∞ . D'autre part, nous allons supposer que cet obstacle est borné : il est strictement inclus dans la boule de rayon R^* .

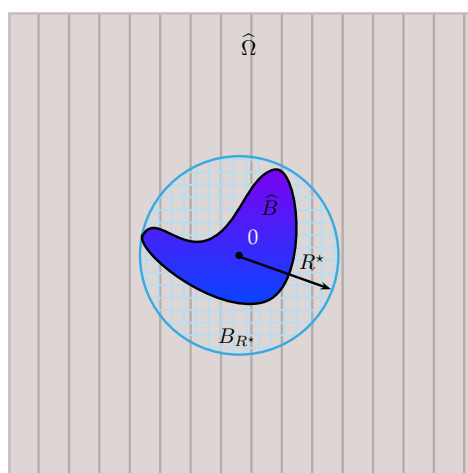


FIGURE 2.1 – Domaine d'étude

Nous paramétrons ce domaine par les coordonnées cartésiennes de champ proche $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3) \in$

\mathbb{R}^3 ainsi que par les coordonnées sphériques $(R, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$ qui sont définies par le changement de variables

$$X_1 = R \sin \theta \cos \varphi, \quad X_2 = R \sin \theta \sin \varphi, \quad \text{et} \quad X_3 = R \cos \theta.$$

Nous considérons une famille de fonctions $U_i : \widehat{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, qui vérifient le système d'équations de Laplace emboîtées

$$\Delta_{\mathbf{X}} U_{i+2}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} U_i(\mathbf{X}, t), \quad \text{pour } \mathbf{X} \in \widehat{\Omega}, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

avec les conditions à la limite de Dirichlet sur la frontière $\widehat{\Gamma}$ de \widehat{B}

$$U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{X} \in \widehat{\Gamma}. \quad (2.2)$$

Ces fonctions sont aussi supposées nulles pour tout $i < 0$ et pour tout $t \leq 0$

$$U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall i < 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{X} \in \widehat{\Omega}, \quad (2.3)$$

$$U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \leq 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \widehat{\Omega}. \quad (2.4)$$

Enfin, nous imposons le cadre fonctionnel suivant (qui est licite car la frontière de l'obstacle est régulière)

$$U_i \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}). \quad (2.5)$$

Remarque 2.1. *Il est aussi tout à fait possible de considérer des conditions de Neumann. Celles-ci prennent la forme :*

$$\frac{\partial U_i}{\partial n}(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{X} \in \widehat{\Gamma}. \quad (2.6)$$

Remarque 2.2. *Comme $U_i = 0$ pour $i < 0$, l'équation (2.1) se réduit pour $i = -2$ et -1 à l'équation de Laplace homogène*

$$\Delta_{\mathbf{X}} U_0(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \Delta_{\mathbf{X}} U_1(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{X} \in \widehat{\Omega}. \quad (2.7)$$

Ce chapitre se divise en deux parties. Nous allons déterminer le développement modal du champ proche dans la section 2.2, puis nous ferons quelques rappels sur le problème de Laplace pour les conditions de Neumann ou de Dirichlet dans la section 2.3.

2.2 Développement modal du champ proche au voisinage de l'infini

2.2.1 Quelques notations

Rappelons ou introduisons quelques notations récurrentes de ce chapitre

- la variable pol peut prendre les valeurs cos et sin.
- Le symbole $\sum_{m,n,\text{pol}}$ doit être compris dans le sens suivant

$$\sum_{m,n,\text{pol}} \lambda_{m,n}^{\text{pol}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(\lambda_{m,n}^{\cos} + \lambda_{m,n}^{\sin} \right) \quad (2.8)$$

- Les opérateurs $M_{m,n,\ell}^{\text{pol},-}$ et $\text{Reg}_{m,n,\ell}^{\text{pol}}$ sont définis par (1.206) et (1.210). Ce sont des applications de l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ vers l'ensemble des fonctions $C^\infty(S^2 \times \mathbb{R})$ avec S^2 la sphère paramétrée par les variables (θ, φ) .
- Soient R_1 et R_2 deux réels positifs ; nous notons $B_{R_1}^c$ le complémentaire de la boule de rayon R_1 et $C_{R_1}^{R_2}$ la couronne de petit rayon R_1 et de grand rayon R_2

$$B_{R_1}^c = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid R \geq R_1 \right\} \quad \text{et} \quad C_{R_1}^{R_2} = \left\{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid R_1 \leq R \leq R_2 \right\}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Développement modal du champ proche

Lors de ce premier résultat, nous supposons qu'il existe une famille de fonctions qui vérifie les équations de Laplace emboîtées et nous exhibons le développement modal de la solution au voisinage de l'infini.

Théorème 2.1. *Si la famille de fonctions $(U_i \in C^\infty(\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}))_{i \leq I}$ vérifient (2.1), (2.2), (2.3) et (2.4), alors il existe deux familles de fonctions $(A_i)_{m,n}^{\text{pol}} \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $(B_i)_{m,n}^{\text{pol}} \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec $i \leq I$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq m \leq n$ et pol qui peut prendre les valeurs cos ou sin telles que pour $R \geq R^*$, $t \in \mathbb{R}$ et $i \leq I$*

$$U_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=0}^i M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell} + \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}. \quad (2.10)$$

Nous pouvons trouver les définitions de $M_{m,n,p}^{\text{pol},-}$ et $\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}$ en (1.206) et (1.210).

Remarque 2.3. *La convergence de la série (2.11) peut être comprise au sens $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}, L^2(C_{R_1}^{R_2}))$, $W_{\text{loc}}^{k_1,\infty}(\mathbb{R}, H^1(C_{R_1}^{R_2}))$ ou encore $W_{\text{loc}}^{k_1,\infty}(\mathbb{R}, H^1(\Delta^{k_2}, C_{R_1}^{R_2}))$, avec R_1 et R_2 deux réels positifs qui vérifient $R^* < R_1 < R_2$ et k_1 et k_2 deux entiers naturels. Par régularité elliptique, voir [14], nous pouvons montrer que la convergence de cette série et de ses dérivées a lieu aussi ponctuellement.*

Remarque 2.4. *Un résultat très similaire qui nous servira par la suite est donné par le lemme suivant.*

Lemme 2.1. *La fonction U_i admet la décomposition suivante*

$$U_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{p=-P}^{+\infty} R^p \left(U_{i,p}(\theta, \varphi, t) \right) + \mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t), \quad (2.11)$$

avec \mathfrak{U}_i^P le reste vérifiant

$$\begin{aligned} \max_{t \leq T} \partial_t^m |\mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t)| &= O_{R \rightarrow +\infty}(R^{-P-1}), \quad \forall m \geq 0 \\ \max_{t \leq T} \partial_t^m |\nabla_{\mathbf{X}} \mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t)| &= O_{R \rightarrow +\infty}(R^{-P-2}), \quad \forall m \geq 0. \end{aligned}$$

De plus, la fonction $U_{i,p}$ admet la décomposition suivante

$$U_{i,p}(\theta, \varphi, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} (U_{i,p})_{m,n}^{\text{pol}}(t) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.12)$$

avec

$$(U_{i,p})_{m,n}^{\text{pol}}(t) = \widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[(B_{i-p-n-1})_{m,n}^{\text{pol},-}] + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[(A_{i-p+n})_{m,n}^{\text{pol}}]. \quad (2.13)$$

Pour faire la preuve du lemme 2.1, nous aurons besoin de quelques résultats du chapitre 1 que nous rappelons ci-dessous. Nous avons

$$\begin{cases} \text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda] = 0 & \forall p < n, \\ M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda] = 0 & \forall p < -n-1. \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous posons la condition de nullité

$$(A_i)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = (B_i)_{m,n}^{\text{pol},-}(t) = 0, \quad \forall i < 0. \quad (2.15)$$

Preuve du lemme 2.1. Nous détaillerons le calcul formel qui permet d'obtenir le résultat mais pas la partie concernant la convergence de la série et la majoration du reste. Nous partons du résultat du théorème 2.1 pour exprimer U_i

$$U_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=0}^i M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell} + \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}. \quad (2.16)$$

D'après (2.15) nous obtenons

$$\begin{cases} \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] = 0 & \forall \ell > i, \\ M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] = 0 & \forall \ell > i. \end{cases} \quad (2.17)$$

En décomposant mode à mode et en plongeant la somme sur ℓ , nous avons

$$(U_i)_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \widetilde{M}_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell} + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}. \quad (2.18)$$

Effectuons à présent le changement de variable $p = -n-1+\ell$ pour la première somme et $p = n+\ell$ pour la seconde, nous obtenons

$$(U_i)_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) = \sum_{p=-n-1}^{+\infty} R^p \widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-} [(B_{i-p-n-1})_{m,n}^{\text{pol},-}] + \sum_{p=n}^{+\infty} R^p \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}} [(A_{i-p+n})_{m,n}^{\text{pol}}]. \quad (2.19)$$

D'après (2.14), nous avons $\widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}} [(A_{i-p+n})_{m,n}^{\text{pol}}] = 0$ pour $p < n$, nous pouvons donc plonger la deuxième somme et nous obtenons

$$(U_i)_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) = \sum_{p=-n-1}^{+\infty} R^p \left(\widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-} [(B_{i-p-n-1})_{m,n}^{\text{pol},-}] + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}} [(A_{i-p+n})_{m,n}^{\text{pol}}] \right). \quad (2.20)$$

En identifiant avec

$$(U_i)_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) = \sum_{p=-P}^{+\infty} R^p U_{i,p}(\mathbf{X}, t) + \underset{R \rightarrow +\infty}{O}(R^{-P-1}), \quad (2.21)$$

nous obtenons (2.13). Ceci termine la preuve. \square

Lemme 2.2. Pour toute fonction $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \Delta_{\mathbf{X}}(\text{Reg}_{m,n,p+2}^{\text{pol}}[\lambda] R^{p+2}) &= \frac{\partial_t^2}{c^2} \text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda] R^p, \\ \text{ii)} \quad \Delta_{\mathbf{X}}(M_{m,n,p+2}^{\text{pol},-}[\lambda] R^{p+2}) &= \frac{\partial_t^2}{c^2} M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda] R^p. \end{aligned}$$

Preuve. Commençons par rappeler la forme de l'opérateur $\Delta_{\mathbf{X}}$

$$\Delta_{\mathbf{X}} = \frac{1}{R^2} \partial_R R^2 \partial_R + \frac{1}{R^2} \Delta_{\Gamma}, \quad (2.22)$$

avec Δ_{Γ} le Laplacien Beltrami vérifiant

$$\Delta_{\Gamma} \text{pol}_m^n(\theta, \varphi) = -n(n+1) \text{pol}_m^n(\theta, \varphi). \quad (2.23)$$

De plus, nous avons

$$\frac{1}{R^2} \partial_R R^2 \partial_R R^{p+2} = (p+2)(p+3) R^p. \quad (2.24)$$

Nous en déduisons

$$\Delta_{\mathbf{X}}(\text{Reg}_{m,n,p+2}^{\text{pol}}[\lambda]R^{p+2}) = [(p+2)(p+3) - n(n+1)]\text{Reg}_{m,n,p+2}^{\text{pol}}[\lambda]R^p. \quad (2.25)$$

Montrer **i)** revient alors à vérifier l'égalité suivante

$$[(p+2)(p+3) - n(n+1)]\text{Reg}_{m,n,p+2}^{\text{pol}}[\lambda] = \frac{\partial_t^2}{c^2}\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda]. \quad (2.26)$$

Remarquons que pour p et n de parité différente nous avons $\text{Reg}_{m,n,p+2}^{\text{pol}}[\lambda] = 0$ et $\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda] = 0$ donc l'égalité est vérifiée.

Pour p et n de même parité, nous pouvons récrire l'égalité en remplaçant $\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}$ par sa définition

$$[(p+2)(p+3) - n(n+1)] \frac{\lambda^{(p+n+3)}(t)}{2\pi c^{p+n+3}} Q_n^{-p+n-3}(-1) \text{pol}_m^n(\theta, \varphi) = \frac{\lambda^{(p+n+3)}(t)}{2\pi c^{p+n+3}} Q_n^{-p+n-1}(-1) \text{pol}_m^n(\theta, \varphi), \quad (2.27)$$

et en simplifiant

$$[(p+2)(p+3) - n(n+1)] Q_n^{-p+n-3}(-1) = Q_n^{-p+n-1}(-1). \quad (2.28)$$

Puisque $\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda] = 0$ pour tout $p < n$, nous prenons $p = n + 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$. Calculons alors le rapport suivant

$$\frac{Q_n^{-p+n-1}(-1)}{Q_n^{-p+n-3}(-1)} = \frac{Q_n^{-2p'-1}(-1)}{Q_n^{-2p'-3}(-1)}. \quad (2.29)$$

En annexes nous avons déterminé Q_n^{-p} pour p pair voir (C.15) et pour p impair voir (C.16), en remplaçant et en simplifiant nous obtenons

$$\frac{Q_n^{-2p'-1}(-1)}{Q_n^{-2p'-3}(-1)} = (2p' + 2)(2n + 2p' + 3). \quad (2.30)$$

Il suffit de remarquer pour $p = n + 2p'$ que

$$[(p+2)(p+3) - n(n+1)] = (2p' + 2)(2n + 2p' + 3), \quad (2.31)$$

pour conclure.

Nous raisonnons exactement de la même façon pour prouver **ii)** dans le cas où n et p sont de même parité. Voyons le cas où n et p sont de parité différente.

Puisque $M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda] = 0$ pour tout $p < -n - 1$, nous prenons $p = -n - 1 + 2p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\frac{Q_n^{-p+n-1}(-1)}{Q_n^{-p+n-3}(-1)} = \frac{Q_n^{2n-2p'}(-1)}{Q_n^{2n-2p'-2}(-1)}. \quad (2.32)$$

D'après (C.15), nous avons

$$\frac{Q_n^{-2(p'-n)}(-1)}{Q_n^{-2(p'-n+1)}(-1)} = 2(2p' - 2n + 1)(p' + 1). \quad (2.33)$$

Il suffit ensuite de remarquer pour $p = -n - 1 + 2p'$ que

$$[(p+2)(p+3) - n(n+1)] = 2(2p' - 2n + 1)(p' + 1), \quad (2.34)$$

pour conclure.

Ceci termine la preuve. \square

Pour démontrer le théorème 2.1, nous allons tout d'abord obtenir le développement modal d'une fonction $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, H_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega}))$ qui vérifie l'équation de Laplace homogène. Puis nous traiterons le cas général.

Étude du noyau de l'équation de Laplace

Proposition 2.1. *Soit $U \in \mathcal{C}^\infty(\widehat{\Omega} \times \mathbb{R})$, qui vérifie*

$$\Delta_{\mathbf{X}} U(\mathbf{X}, t) = 0 \quad \text{dans } \widehat{\Omega} \quad \text{et} \quad U(\mathbf{X}, t) = 0 \quad \forall t \leq 0, \quad (2.35)$$

alors il existe deux familles de fonctions du temps $A_{m,n}^{\text{pol}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $B_{m,n}^{\text{pol}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$U(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-} [B_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1} + \text{Reg}_{m,n,n}^{\text{pol}} [A_{m,n}^{\text{pol}}] R^n, \quad (2.36)$$

et $A_{m,n}^{\text{pol}}(t) = B_{m,n}^{\text{pol}}(t) = 0$ pour tout $t \leq 0$.

Preuve. Nous agissons par séparation de variables. Décomposons la fonction U à l'aide des harmoniques sphériques pol_n^m

$$U(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} U_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi). \quad (2.37)$$

Les fonctions $U_{m,n}^{\text{pol}}$ vérifient

$$\frac{1}{R^2} \partial_R R^2 \partial_R U_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) - \frac{n(n+1)}{R^2} U_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) = 0, \quad (2.38)$$

et sont par conséquent données par

$$U_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) = A(t) R^n + B(t) R^{-n-1}, \quad (2.39)$$

avec $A, B \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$\begin{cases} \widetilde{M}_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-} [B_{m,n}^{\text{pol},-}] = \frac{q_n^n}{4\pi} B_{m,n}^{\text{pol}}(t), \\ \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,n}^{\text{pol}} [A_{m,n}^{\text{pol}}] = \frac{d_t^{2n+1} A_{m,n}^{\text{pol}}(t)}{2\pi c^{2n+1}} Q_n^{-1}(-1). \end{cases} \quad (2.40)$$

Nous pouvons alors identifier

$$\begin{cases} d_t^{2n+1} A_{m,n}^{\text{pol}}(t) = \frac{2\pi c^{2n+1}}{Q_n^{-1}(-1)} A(t), \\ B_{m,n}^{\text{pol}}(t) = \frac{4\pi}{q_n^n} B(t). \end{cases} \quad (2.41)$$

Pour déterminer $A_{m,n}^{\text{pol}}$, nous utilisons $d_t^\ell A_{m,n}^{\text{pol}}(t) = 0$ pour tout $\ell \leq 2n$. Ceci termine la preuve. \square

Corollaire 2.1. *Soient U_0 et U_1 deux fonctions vérifiant les équations de Laplace emboîtées, nous avons*

$$\begin{cases} U_0(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-} [(B_0)_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1} + \text{Reg}_{m,n,n}^{\text{pol}} [(A_0)_{m,n}^{\text{pol}}] R^n, \\ U_1(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=0}^1 M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{1-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell} + \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{1-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}. \end{cases} \quad (2.42)$$

Preuve. Pour U_0 , il suffit de remarquer que U_0 est solution de l'équation de Laplace homogène et d'appliquer la proposition 2.1.

La fonction U_1 est elle aussi solution de l'équation de Laplace homogène. Elle peut s'écrire sous la forme

$$U_1(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} (U_1)_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) \text{pol}_n^m(\theta, \varphi), \quad (2.43)$$

avec

$$(U_1)_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) = \mathbf{A}_1(t)R^n + \mathbf{B}_1(t)R^{-n-1}, \quad \text{avec } \mathbf{A}_1 \text{ et } \mathbf{B}_1 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}). \quad (2.44)$$

Analyse :

Supposons que (2.42) est valide et déterminons $(A_1)_{m,n}^{\text{pol}}$ et $(B_1)_{m,n}^{\text{pol}}$ en fonction de \mathbf{A}_1 et \mathbf{B}_1 . L'équation (2.42) s'écrit

$$\begin{aligned} U_1(\mathbf{X}, t) &= \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-} [(B_1)_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1} + \text{Reg}_{m,n,n}^{\text{pol}} [(A_1)_{m,n}^{\text{pol}}] R^n \\ &+ M_{m,n,-n}^{\text{pol},-} [(B_0)_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n} + \text{Reg}_{m,n,n+1}^{\text{pol}} [(A_0)_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+1}. \end{aligned}$$

Commençons par éliminer les termes nuls. Rappelons que $\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda] = 0$ si n et p sont de parité différente, voir le théorème 1.5. Il suit

$$\text{Reg}_{m,n,n+1}^{\text{pol}} [(A_0)_{m,n}^{\text{pol}}] = 0. \quad (2.45)$$

D'autre part, nous avons par définition, voir (1.206)

$$\begin{aligned} M_{m,n,-n}^{\text{pol},-} [(B_0)_{m,n}^{\text{pol},-}] &= 0 \quad \text{si } n \neq 0, \\ &= -\frac{d_t(B_0)_{0,0}^{\text{pol},-}(t)}{4\pi c} \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Il suffit ensuite d'identifier pour obtenir $(B_1)_{m,n}^{\text{pol},-}$ et $(A_1)_{m,n}^{\text{pol}}$. Séparons le cas $n = 0$ et $n \neq 0$.

Pour $n \neq 0$, nous avons

$$(U_1)_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) = \mathbf{A}_1(t)R^n + \mathbf{B}_1(t)R^{-n-1}, \quad (2.46)$$

et

$$(U_1)_{m,n}^{\text{pol}}(R, t) = \widetilde{M}_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-} [(B_1)_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1} + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,n}^{\text{pol}} [(A_1)_{m,n}^{\text{pol}}] R^n. \quad (2.47)$$

Il suffit ensuite de remarquer

$$\begin{cases} \widetilde{M}_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-} [(B_1)_{m,n}^{\text{pol},-}] = q_n^n \frac{(B_1)_{m,n}^{\text{pol},-}(t)}{4\pi}, \\ \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,n}^{\text{pol}} [(A_1)_{m,n}^{\text{pol}}] = \frac{\partial_t^{2n+1}(A_1)_{m,n}^{\text{pol}}(t)}{2\pi c^{2n+1}} Q_n^{-1}(-1). \end{cases} \quad (2.48)$$

En identifiant, il suit

$$\begin{cases} (B_1)_{m,n}^{\text{pol},-}(t) = \frac{4\pi \mathbf{B}_1(t)}{q_n^n}, \\ \partial_t^{2n+1}(A_1)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = \frac{2\pi c^{2n+1}}{Q_n^{-1}(-1)} \mathbf{A}_1(t). \end{cases} \quad (2.49)$$

Pour déterminer $(A_1)_{m,n}^{\text{pol}}$, nous utilisons $d_t^\ell(A_1)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = 0$ pour tout $\ell \leq 2n$.

Pour $n = 0$, nous avons

$$(U_1)_{0,0}^{\text{pol}}(R, t) = \mathbf{A}_1(t) + \frac{\mathbf{B}_1(t)}{R}, \quad (2.50)$$

et

$$(U_1)_{0,0}^{\text{pol}}(R, t) = \widetilde{M}_{0,0,-1}^{\text{pol},-} [(B_1)_{0,0}^{\text{pol},-}] R^{-1} + \widetilde{\text{Reg}}_{0,0,0}^{\text{pol}} [(A_1)_{0,0}^{\text{pol}}] + \widetilde{M}_{0,0,0}^{\text{pol},-} [(B_0)_{0,0}^{\text{pol},-}]. \quad (2.51)$$

Il suffit ensuite de remarquer

$$\begin{cases} \widetilde{M}_{0,0,-1}^{\text{pol},-} [(B_1)_{0,0}^{\text{pol},-}] = \frac{(B_1)_{0,0}^{\text{pol},-}(t)}{4\pi}, \\ \widetilde{\text{Reg}}_{0,0,0}^{\text{pol}} [(A_1)_{0,0}^{\text{pol}}] + \widetilde{M}_{0,0,0}^{\text{pol},-} [(B_0)_{0,0}^{\text{pol},-}] = \frac{\partial_t(A_1)_{0,0}^{\text{pol}}(t)}{2\pi c} Q_0^{-1}(-1) - \frac{\partial_t(B_0)_{0,0}^{\text{pol},-}(t)}{4\pi c}. \end{cases} \quad (2.52)$$

En identifiant, il suit

$$\begin{cases} (B_1)_{0,0}^{\text{pol},-}(t) = 4\pi \mathbf{B}_1(t), \\ \partial_t(A_1)_{0,0}^{\text{pol}}(t) = \frac{2\pi c}{Q_0^{-1}(-1)} \left(\mathbf{A}_1(t) + \frac{\partial_t(B_0)_{0,0}^{\text{pol},-}(t)}{4\pi c} \right). \end{cases} \quad (2.53)$$

Pour déterminer $(A_1)_{0,0}^{\text{pol}}$, nous utilisons $(A_1)_{0,0}^{\text{pol}}(t) = 0$.

Synthèse :

Si U_1 s'écrit sous la forme (2.42) alors U_1 est solution de l'équation de Laplace. Ceci termine la preuve. \square

Étude de l'équation de Laplace emboîtée : cas général

Commençons par rappeler l'équation de Laplace emboîtée.

Lemme 2.3. *Soit U_i une famille de fonctions de $C^\infty(H_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega}))$ définies pour $i \leq I$ vérifiant*

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} U_{i-2}(\mathbf{X}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in \widehat{\Omega}, \quad \forall t \geq 0, \\ U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall \mathbf{X} \in \widehat{\Gamma}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.54)$$

et les développement modaux sur $B_{R^*}^c$

$$U_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=0}^i M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell} + \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}. \quad (2.55)$$

Une solution particulière de

$$\Delta_{\mathbf{X}} U_{i+1}^*(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} U_{i-1}(\mathbf{X}, t) \quad \text{sur } B_{R^*}^c \times \mathbb{R}^+, \quad (2.56)$$

est donnée par

$$U_{i+1}^*(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=1}^{i+1} M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i+1-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell} + \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{i+1-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}. \quad (2.57)$$

Preuve. Appliquons $\Delta_{\mathbf{X}}$ à U_{i+1}^* donné par (2.57)

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{X}} U_{i+1}^*(\mathbf{X}, t) &= \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=1}^{i+1} \Delta_{\mathbf{X}} (M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i+1-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell}) \\ &+ \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=1}^{i+1} \Delta_{\mathbf{X}} (\text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{i+1-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}). \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 2.2, nous avons

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} (M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda] R^{p+2}) = \frac{\partial_t^2}{c^2} M_{m,n,p-2}^{\text{pol},-}[\lambda] R^p, \\ \Delta_{\mathbf{X}} (\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda] R^{p+2}) = \frac{\partial_t^2}{c^2} \text{Reg}_{m,n,p-2}^{\text{pol},-}[\lambda] R^p. \end{cases} \quad (2.58)$$

Il suit

$$\Delta_{\mathbf{X}} U_{i+1}^*(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=1}^{i+1} \frac{\partial_t^2}{c^2} M_{m,n,-n-3+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i+1-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-3+\ell} + \frac{\partial_t^2}{c^2} \text{Reg}_{m,n,n+\ell-2}^{\text{pol}} [(A_{i+1-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell-2}. \quad (2.59)$$

Effectuons le changement de variable $\ell = \ell - 2$, nous obtenons

$$\Delta_{\mathbf{X}} U_{i+1}^*(\mathbf{X}, t) = \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=-1}^{i-1} \frac{\partial_t^2}{c^2} M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i-1-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell} + \frac{\partial_t^2}{c^2} \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{i-1-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}. \quad (2.60)$$

Or remarquons que pour $\ell = -1$,

$$M_{m,n,-n-2}^{\text{pol},-} [(B_i)_{m,n}^{\text{pol},-}] = 0 \quad \text{et} \quad \text{Reg}_{m,n,n-1}^{\text{pol}} [(A_i)_{m,n}^{\text{pol}}] = 0. \quad (2.61)$$

Il suit

$$\Delta_{\mathbf{X}} U_{i+1}^*(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=0}^{i-1} M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [(B_{i-1-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell} + \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}} [(A_{i-1-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}. \quad (2.62)$$

Nous obtenons bien de façon formelle

$$\Delta_{\mathbf{X}} U_{i+1}^*(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} U_{i-1}(\mathbf{X}, t). \quad (2.63)$$

Maintenant prouvons la convergence en norme L^2 de la somme.

À ℓ fixé, nous avons une somme orthogonale. Nous savons grâce au noyau que

$$\sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-} [B_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1} + \text{Reg}_{m,n,n}^{\text{pol}} [A_{m,n}^{\text{pol}}] R^n, \quad (2.64)$$

converge en norme L^2 . Nous avons alors

$$\sum_{m,n,\text{pol}} \|M_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-} [B_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1} + \text{Reg}_{m,n,n}^{\text{pol}} [A_{m,n}^{\text{pol}}] R^n\|^2 < \infty. \quad (2.65)$$

Pour les termes réguliers ($\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}$), ils sont en nombre fini car $U_i(X, t) = O_{R \rightarrow +\infty}(R^i)$, il n'y a pas de problème de convergence.

Pour les termes singuliers, montrons à présent que

$$\sum_{m,n,\text{pol}} \|M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-} [B_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell}\|^2 \leq \partial_t^{\ell-1} \sum_{m,n,\text{pol}} \|M_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-} [B_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1}\|^2.$$

Hypothèse : Nous avons

$$\max_{R > R^*} \max_{t \leq T} R^{-i} U_i(\mathbf{X}, t) < \infty, \quad (2.66)$$

soit encore

$$U_i(\mathbf{X}, t) = O_{R \rightarrow +\infty}(R^i). \quad (2.67)$$

Il nous faut montrer

$$|\widetilde{M}_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-}[\lambda]| \leq \alpha \partial_t^\ell |\widetilde{M}_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-}[\lambda]|. \quad (2.68)$$

La série $\sum_{m,n,\text{pol}} \partial_t^\ell |\widetilde{M}_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-}[\lambda]|$ converge car elle est définie à partir d'un U_i précédent. Par définition, nous avons

$$\partial_t^\ell |\widetilde{M}_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-}[\lambda]| = q_n^n \frac{|\lambda^{(\ell)}(t)|}{4\pi} = \frac{(2n)!}{n!2^n} \frac{|\lambda^{(\ell)}(t)|}{4\pi}, \quad (2.69)$$

et

$$|\widetilde{M}_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-}[\lambda]| = \sum_{\max(0,n-\ell)}^n \frac{q_n^k}{(\ell-n+k)!} \frac{|\lambda^{(\ell)}(t)|}{4\pi c^\ell} = \sum_{\max(0,n-\ell)}^n \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!2^k(\ell-n+k)!} \frac{|\lambda^{(\ell)}(t)|}{4\pi c^\ell}. \quad (2.70)$$

Dans la somme qui définit $\widetilde{M}_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-}[\lambda]$, il y a au maximum ℓ termes. Faisons le ratio, nous avons

$$R = \frac{\frac{q_n^k}{(\ell-n+k)!} \frac{|\lambda^{(\ell)}(t)|}{4\pi c^\ell}}{\frac{q_n^n}{4\pi} \frac{|\lambda^{(\ell)}(t)|}{4\pi}} = \frac{(n+k)!n!}{(2n)!k!} \frac{2^{n-k}}{(n-k)!(\ell-n+k)!c^\ell}. \quad (2.71)$$

Cependant, k est positif et $k \geq n - \ell$ donc $n - k \leq \ell$, nous déduisons

$$2^{n-k} \leq 2^\ell. \quad (2.72)$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{(n+k)!n!}{(2n)!k!} = \frac{(k+1) \cdots n}{(n+k+1) \cdots (2n)} \leq 1, \quad (2.73)$$

et également

$$\frac{1}{(n-k)!(\ell-n+k)!} \leq 1. \quad (2.74)$$

Il suit

$$R \leq \text{Cst } 2^\ell, \quad (2.75)$$

nous déduisons alors

$$\frac{|\widetilde{M}_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-}[\lambda]|}{|\widetilde{M}_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-}[\lambda^{(\ell)}]|} \leq \text{Cte } \ell 2^\ell. \quad (2.76)$$

Nous avons alors une convergence L_{loc}^2 . \square

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat dans le cas général à savoir faire la preuve du théorème 2.1.

Preuve du théorème 2.1. Soit $V_{i+1} = U_{i+1} - U_{i+1}^*$ la fonction donnée par

$$\begin{aligned} V_{i+1}(\mathbf{X}, t) &= U_{i+1}(\mathbf{X}, t) - U_{i+1}^*(\mathbf{X}, t), \\ &= \sum_{m,n,\text{pol}} M_{m,n,-n-1}^{\text{pol},-}[(B_{i+1})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1} + \text{Reg}_{m,n,n}^{\text{pol}}[(A_{i+1})_{m,n}^{\text{pol}}] R^n. \end{aligned}$$

La proposition 2.1 nous permet de remarquer que V_{i+1} vérifie

$$\Delta_{\mathbf{X}} V_{i+1}(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \text{dans } B_{R^*}^c \times \mathbb{R}^+. \quad (2.77)$$

La fonction V_{i+1} est donc solution de l'équation de Laplace homogène et nous avons déterminé une solution particulière de l'équation de Laplace emboîtée dans le lemme 2.3. Il suffit à présent de sommer les expressions de V_{i+1} et U_{i+1}^* afin d'obtenir la solution de l'équation de Laplace emboîtée dans le cas général

$$\begin{aligned} U_{i+1}(\mathbf{X}, t) &= V_{i+1}(\mathbf{X}, t) + U_{i+1}^*(\mathbf{X}, t), \\ &= \sum_{m,n,\text{pol}} \sum_{\ell=0}^{i+1} M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-}[(B_{i+1-\ell})_{m,n}^{\text{pol},-}] R^{-n-1+\ell} + \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}}[(A_{i+1-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell}. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. \square

2.3 Rappels sur le problème extérieur de Laplace

2.3.1 Condition de Neumann

Dans cette section nous rappelons le cadre fonctionnel pour la résolution du problème de Neumann en domaine non borné

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}), \\ \partial_n U(\mathbf{X}) = 0, \end{cases} \quad (2.78)$$

avec F un terme source volumique. À la fin de cette section, nous pourrions affirmer l'existence d'une solution de ce problème avec

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} U(\mathbf{X}) - U_{as}(\mathbf{X}) = 0, \quad (2.79)$$

avec U_{as} le comportement asymptotique de la solution U .

L'espace variationnel H_{Neu}

Commençons par définir l'espace H_{Neu}

$$H_{\text{Neu}} := \{U \in L^2_{\text{loc}}(\hat{\Omega}) : \nabla U \in L^2(\hat{\Omega})\}, \quad (2.80)$$

avec L^2_{loc} l'ensemble des fonctions qui vérifient $\chi U \in L^2(\hat{\Omega})$ pour tout $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ (en d'autres termes, les fonctions $L^2(\hat{\Omega})$ sur tout borné y compris au voisinage de la frontière).

Propriété 2.1. *Pour tout $U \in H$, la limite suivante est convergente*

$$U_{\infty} := \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} U(R, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.81)$$

Notation 2.1. *Nous notons Γ_{R^*} la sphère de rayon R^* , $d\sigma$ la mesure sur la sphère unité notée \mathbb{S} , d'où*

$$\int_{\mathbb{S}} U(R, \theta, \varphi) d\sigma = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} U(R, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.82)$$

et enfin \overline{U}_{R^*} la valeur moyenne de U sur la sphère Γ_{R^*}

$$\overline{U}_{R^*} := \frac{1}{4\pi(R^*)^2} \int_{\Gamma_{R^*}} U(R, \theta, \varphi) R^2 d\sigma. \quad (2.83)$$

Remarque 2.5. *Remarquons que U_{∞} est la limite de la valeur moyenne de U sur la sphère de rayon R^* , en effet*

$$\begin{aligned} \lim_{R^* \rightarrow +\infty} \overline{U}_{R^*} &= \lim_{R^* \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi(R^*)^2} \int_{\Gamma_{R^*}} U(R, \theta, \varphi) R^2 d\sigma \\ &= \lim_{R^* \rightarrow +\infty} \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} U(R^*, \theta, \varphi) d\sigma =: U_{\infty}. \end{aligned}$$

Preuve de la propriété 2.1. Cette preuve est une adaptation d'un résultat que nous pouvons trouver dans [9]. D'après la remarque 2.5, nous avons

$$\overline{U}_{R^*} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} U(R^*, \theta, \varphi) d\sigma. \quad (2.84)$$

Montrons que \overline{U}_{R^*} est de Cauchy au voisinage de l'infini. Nous avons

$$\begin{aligned} |\overline{U}_{R_2} - \overline{U}_{R_1}| &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (U(R_2, \theta, \varphi) - U(R_1, \theta, \varphi)) d\sigma \right| \\ &= \frac{1}{4\pi} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \partial_R U(R, \theta, \varphi) dR d\sigma \right|. \end{aligned}$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned} |\overline{U}_{R_2} - \overline{U}_{R_1}| &\leq \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} |\partial_R U(R, \theta, \varphi)|^2 R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi \right)^{1/2} \\ &\times \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{R^2} dR d\sigma \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$|\overline{U}_{R_2} - \overline{U}_{R_1}| \leq \text{Cte} \|\nabla U\|_{L^2(\Gamma_{R^*} \times [R_1, R_2])} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \xrightarrow{R_1, R_2 \rightarrow +\infty} 0. \quad (2.85)$$

Ceci termine la preuve. \square

Propriété 2.2. *L'espace H_{Neu} est un espace de Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire*

$$(U, V)_{H_{\text{Neu}}} = \int_{\widehat{\Omega}} \nabla U(\mathbf{X}) \cdot \nabla V(\mathbf{X}) + U_\infty V_\infty.$$

La preuve s'effectue par contradiction, voir [31].

L'espace de Beppo-Levi H_0

Définition 2.1. *L'espace de Beppo-Levi H_0 est défini comme la fermeture des fonctions de $\mathcal{D}(\widehat{\Omega})$ vis-à-vis du produit scalaire*

$$\int_{\widehat{\Omega}} \left(\nabla U \cdot \nabla V + \frac{UV}{R^2} \right) R^2 dR d\sigma \quad (2.86)$$

au sens $H_0 := \{U : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid \nabla U \in L^2(\widehat{\Omega}) \text{ et } \frac{U}{R} \in L^2(\widehat{\Omega})\}.$

Propriété 2.3. *Nous avons équivalence de normes dans H_0 . Il existe $\text{Cte} > 0, \forall v \in H_0$*

$$\|\nabla v\|_{L^2(\widehat{\Omega})} \leq \|\nabla v\|_{L^2(\widehat{\Omega})} + \left\| \frac{v}{R} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega})} \leq \text{Cte} \|\nabla v\|_{L^2(\widehat{\Omega})}$$

Preuve. Nous pouvons nous référer à [24] pour la preuve. \square

Lemme 2.4. *Si $U \in H_{\text{Neu}}$ alors $U - U_\infty \in H_0$.*

Preuve du lemme 2.4. Nous nous référerons à [9]. Comme $U_\infty \in \mathbb{R}$ et $\nabla U \in L^2(\widehat{\Omega})$ (par définition de H_{Neu}), nous avons $\nabla(U - U_\infty) \in L^2(\widehat{\Omega})$.

Il nous reste à montrer que

$$\frac{U - U_\infty}{R} \in L^2(\widehat{\Omega}). \quad (2.87)$$

Soient $R_1 > 0$ tel que $\widehat{B} \subset B_{R_1}$ et $\widehat{\Omega}_{R_1} := \widehat{\Omega} \cap B_{R_1}$.

Puisque $U \in H_{\text{loc}}^1(\widehat{\Omega})$ et $U_\infty \in \mathbb{R}$, nous avons $\frac{U - U_\infty}{R} \in L^2(\widehat{\Omega}_{R_1})$.

Démontrons à présent que $\frac{U - U_\infty}{R} \in L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1})$. Nous avons

$$U - U_\infty = U - \overline{U} + \overline{U} - U_\infty, \quad (2.88)$$

avec \overline{U} la moyenne de U sur la sphère unité, défini par (2.84) pour $R^* = 1$. Montrer $\frac{U - U_\infty}{R} \in L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1})$ revient à montrer

$$\frac{U - \overline{U}}{R} \in L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1}) \quad \text{et} \quad \frac{\overline{U} - U_\infty}{R} \in L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1}). \quad (2.89)$$

Commençons par la première. Nous avons

$$\left\| \frac{U - \overline{U}}{R} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1})}^2 = \int_{R > R_1} \int_{\mathbb{S}} \frac{(U - \overline{U})^2}{R^2} R^2 d\sigma dR = \int_{R > R_1} \int_{\mathbb{S}} (U - \overline{U})^2 d\sigma dR. \quad (2.90)$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré sur la sphère unité, puisque $U - \overline{U}$ est à moyenne nulle, nous avons

$$\int_{\mathbb{S}} (U - \overline{U})^2(R, \theta, \varphi) d\sigma \leq C \int_{\mathbb{S}} |\nabla_{\Gamma} U|^2 d\sigma, \quad (2.91)$$

avec

$$\nabla_{\Gamma} U = \partial_{\theta} U(R, \theta, \varphi) \vec{e}_{\theta} + \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\varphi} U(R, \theta, \varphi) \vec{e}_{\varphi}. \quad (2.92)$$

Nous obtenons alors

$$\int_{R > R_1} \int_{\mathbb{S}} \frac{(U - \overline{U})^2(R, \theta, \varphi)}{R^2} R^2 d\sigma \leq C \int_{R > R_1} \int_{\mathbb{S}} \frac{|\nabla_{\Gamma} U|^2}{R^2} R^2 d\sigma. \quad (2.93)$$

Puisque $\nabla_{\mathbf{x}} U = \partial_R U + \frac{1}{R} \nabla_{\Gamma} U$, nous obtenons

$$\left\| \frac{U - \overline{U}}{R} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1})}^2 \leq C \|\nabla_{\mathbf{x}} U\|_{L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1})}^2 < +\infty. \quad (2.94)$$

Montrons que $\frac{\overline{U} - U_\infty}{R} \in L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1})$, nous avons par définition

$$\left\| \frac{\overline{U} - U_\infty}{R} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1})}^2 = \int_{\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1}} \frac{(\overline{U} - U_\infty)^2}{R^2} R^2 dR d\sigma. \quad (2.95)$$

En prenant $R_1 = R$ et R_2 qui tend vers l'infini dans l'équation (2.85), nous avons

$$|\overline{U}_R - U_\infty| \leq \frac{\text{Cte}}{R} \|\nabla_{\mathbf{x}} U\|_{L^2(\widehat{\Omega})}. \quad (2.96)$$

Il suit

$$\left\| \frac{\overline{U} - U_\infty}{R} \right\|_{L^2(\widehat{\Omega} \setminus B_{R_1})}^2 \leq \text{Cte} \|\nabla U\|_{L^2(\widehat{\Omega})}^2 \int_{L^2(\Omega \setminus B_{R_1})} \frac{1}{R^2} dR d\sigma < +\infty. \quad (2.97)$$

□

Théorème 2.2. *Nous avons la caractérisation suivante de H_0*

$$H_0 = \{U \in H \mid U_\infty = 0\}. \quad (2.98)$$

Preuve. Nous reprenons ce qui a été fait dans [9]. Notons $D = \{U \in H \mid U_\infty = 0\}$. Commençons par montrer $H_0 \subset D$.

Soit $U \in H_0$, d'après le lemme 2.4, $U - U_\infty \in H_0$, donc $U_\infty \in H_0$. Par conséquent, $\frac{U_\infty}{R} \in L^2(\widehat{\Omega})$ ce qui est impossible sauf si $U_\infty = 0$.

Montrons à présent l'inclusion inverse.

Soit $U \in D$. D'après le lemme 2.4, $U - U_\infty \in H_0$, comme $U_\infty = 0$, $U \in H_0$. □

Théorème 2.3. *L'espace H_0 est un espace de Hilbert quand il est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H_0} = \int_{\hat{\Omega}} \nabla U \cdot \nabla V d\mathbf{X}, \quad (2.99)$$

avec $d\mathbf{X} = d\sigma dR$.

Preuve. Remarquons que pour tout $U, V \in H_0$ nous avons

$$\int_{\hat{\Omega}} \nabla U \cdot \nabla V d\mathbf{X} + U_{\infty} V_{\infty} = \int_{\hat{\Omega}} \nabla U \cdot \nabla V d\mathbf{X}. \quad (2.100)$$

□

Définition 2.2. *Nous disons qu'une fonction $F : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ est dans H_0^* si et seulement si*

$$\forall V \in H_0, \quad \int_{\hat{\Omega}} FV \leq C_F \|\nabla V\|_{L^2(\hat{\Omega})}.$$

Théorème 2.4. *Soit F une fonction de H_0^* . Il existe un unique $U \in H_0$ qui vérifie*

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{X}} U = F & \text{dans } \hat{\Omega}, \\ \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\hat{\Omega}. \end{cases}$$

Preuve. Nous pourrions se référer à [24]. Ce problème admet la formulation variationnelle

$$\begin{cases} \text{Trouver } U \in H_0 \text{ tel que :} \\ \forall V \in H_0, \quad \int_{\hat{\Omega}} \nabla U \cdot \nabla V d\mathbf{X} = \langle F, V \rangle. \end{cases} \quad (2.101)$$

La forme bilinéaire associée est coercive. En effet :

$$\int_{\hat{\Omega}} \nabla U \cdot \nabla U d\mathbf{X} = \|\nabla U\|_{L^2(\hat{\Omega})}^2 \geq C \left\| \frac{U}{R} \right\|_{L^2(\hat{\Omega})}^2 \quad (2.102)$$

D'après le théorème de Lax-Milgram et la proposition 2.3, ceci termine la preuve. □

Nous pouvons aussi chercher à voir si F vérifie

$$\int FV \leq C_F \left(\|\nabla V\|_{L^2(\hat{\Omega})} + \left\| \frac{V}{R} \right\|_{L^2(\hat{\Omega})} \right)$$

Remarque 2.6 (exemple de fonctions du dual). *Soit $F : \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Associons à F la fonction G définie par*

$$G(\mathbf{X}) = RF(\mathbf{X}). \quad (2.103)$$

La fonction F est un élément de H_0^ si $G \in L^2(\hat{\Omega})$. En effet, nous avons d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz*

$$\int FV = \int RF \frac{V}{R} \leq \|RF\|_{L^2(\hat{\Omega})} \left\| \frac{V}{R} \right\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq \|RF\|_{L^2(\hat{\Omega})} \left(\|\nabla V\|_{L^2(\hat{\Omega})} + \left\| \frac{V}{R} \right\|_{L^2(\hat{\Omega})} \right).$$

En particulier, si $F \in L^2(\hat{\Omega})$ à support compact alors G est $L^2(\hat{\Omega})$ et $F \in H_0^$. En effet, nous avons*

$$\|RF\|_{L^2(\hat{\Omega})} \leq R^* \|F\|_{L^2(\hat{\Omega})},$$

où $R^* = \sup_{\mathbf{X} \in \text{supp} F} \|\mathbf{X}\|_{L^2(\widehat{\Omega})}$. De même, si $F \in L^2(\widehat{\Omega})$ et $F = O\left(\frac{1}{R^{5/2+s}}\right)$ avec $s > 0$ alors G est un élément de $L^2(\widehat{\Omega})$

$$\int_{\widehat{\Omega}} G^2(R, \theta, \varphi) R^2 dR d\sigma = \int_{\widehat{\Omega}} R^2 F^2(R, \theta, \varphi) R^2 dR d\sigma,$$

or $F^2(R, \theta, \varphi) R^4 = O\left(\frac{1}{R^{5+2s}}\right) R^4 \leq \frac{C}{R^{1+s}}$ qui est intégrable.

Nous allons à présent voir la formulation variationnelle du problème précédent. Nous partons de l'équation suivante

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{X}} U = F & \text{dans } H_0^* \\ \partial_n U = 0 & \text{dans } H^{-1/2}(\partial\widehat{\Omega}) \end{cases} \quad (2.104)$$

Multiplions la première ligne de (2.104) par $V \in H_0$

$$\int_{\widehat{\Omega}} -\Delta_{\mathbf{X}} U V = \int_{\widehat{\Omega}} F V. \quad (2.105)$$

D'après la formule de Green, nous avons

$$\int_{\widehat{\Omega}} \nabla U \cdot \nabla V - \int_{\partial\widehat{\Omega}} \partial_n U \cdot V = \int_{\widehat{\Omega}} F V. \quad (2.106)$$

En tenant compte de la condition à la limite il suit

$$\int_{\widehat{\Omega}} \nabla U \cdot \nabla V = \int_{\widehat{\Omega}} F V. \quad (2.107)$$

L'existence et l'unicité de la solution suit du théorème de Lax-Milgram. Il existe un unique $U \in H_0$ tel que $a(U, V) = \ell(V)$ avec a , respectivement ℓ la forme bilinéaire définie positive, respectivement linéaire, définies sur H_0 .

Considérons maintenant le même problème posé sur H_{Neu} fermé par la condition $U_{\infty} = \alpha$

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{X}} U = F \\ U_{\infty} = \alpha \\ \partial_n U = 0. \end{cases} \quad (2.108)$$

Posons $\tilde{U} = U - \alpha$. Nous nous ramenons au problème suivant

$$\begin{cases} \tilde{U} \in H_0, \\ -\Delta \tilde{U} = F, \quad \text{car } -\Delta \tilde{U} = -\Delta_{\mathbf{X}} U + \Delta \alpha = -\Delta_{\mathbf{X}} U, \\ \partial_n \tilde{U} = 0, \end{cases} \quad (2.109)$$

qui est lui-même bien posé. Dans le sens inverse, si U est la solution du problème (2.104), pour $V \in \mathcal{D}(\widehat{\Omega})$, nous montrons à l'aide de la formule de Green

$$\int_{\widehat{\Omega}} -\Delta_{\mathbf{X}} U \cdot V = \int_{\widehat{\Omega}} F \cdot V, \quad (2.110)$$

puis pour $V \in \mathcal{D}(\widehat{\Omega})$

$$\int_{\widehat{\Omega}} -\nabla U \cdot \nabla V + \int_{\partial \widehat{\Omega}} \partial_n U \cdot V = \int_{\widehat{\Omega}} F \cdot V. \quad (2.111)$$

Il suit que $\partial_n U = 0$. Nous pouvons passer à la démonstration du théorème 2.5 plus général. Soit χ une fonction de troncature qui vaut 1 en $+\infty$ et 0 au voisinage de l'obstacle \widehat{B} .

Théorème 2.5. *Soient $F : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ et $U_{as} : \widehat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions qui vérifient*

$$F + \Delta_{\mathbf{X}}(\chi U_{as}) \in H_0^*. \quad (2.112)$$

Il existe un unique $U \in H$ qui vérifie

$$\begin{cases} -\Delta_{\mathbf{X}} U = F & \text{dans } \widehat{\Omega} \\ U - U_{as} \in H_0 \\ \partial_n U = 0. \end{cases} \quad (2.113)$$

Remarque 2.7. *La condition $U - U_{as} \in H_0$ équivaut à $(\overline{U - U_{as}})_{\infty} = 0$. C'est le sens que nous donnons à la limite de (2.78).*

Preuve du théorème 2.5. Posons $\widetilde{U} = U - \chi(R)U_{as}$. Nous avons

$$\begin{cases} -\Delta \widetilde{U} = -\Delta(U - \chi U_{as}) = F + \Delta(\chi U_{as}) & \in H_0^*, \\ \partial_n \widetilde{U} = 0. \end{cases} \quad (2.114)$$

Remarque 2.8. *Introduisons le commutateur*

$$\langle \Delta, \chi \rangle U_{as} = \Delta(\chi U_{as}) - \chi(\Delta_{\mathbf{X}} U_{as}), \quad (2.115)$$

avec $\chi(\Delta_{\mathbf{X}} U_{as}) = \Delta(\chi U_{as}) - 2\nabla \chi \cdot \nabla U_{as} - (\Delta \chi)U_{as}$. Nous obtenons $\langle \Delta, \chi \rangle U_{as} = 2\nabla \chi \cdot \nabla U_{as} + \Delta(\chi U_{as})$. Les fonctions $\Delta \chi$ et $\nabla \chi$ sont à support dans un intervalle fermé, en effet, il existe un $R_0 > 0$ tel que pour tout $R < R_0$ la fonction de troncature χ est nulle. De même, il existe un $R_1 > R_0$ tel que pour tout $R > R_1$, $\chi(R) = 1$. Par conséquent, χ varie sur $[R_0, R_1]$ et est constante en dehors.

Nous sommes donc ramenés au problème précédent. \square

2.3.2 Condition de Dirichlet

Dans cette section nous allons chercher à définir un espace pour lequel le problème (2.116) sera bien posé et admettra donc une unique solution.

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}), \\ U(\mathbf{X}) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{\widehat{B}}. \end{cases} \quad (2.116)$$

Définissons l'espace H_{Dir}

$$H_{\text{Dir}} := \{U \in L_{\text{loc}}^2(\widehat{\Omega}) : \nabla U \in L^2(\widehat{\Omega}) \text{ et } U = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_{\widehat{B}}\}, \quad (2.117)$$

avec L_{loc}^2 l'ensemble des fonctions qui vérifient $\chi U \in L^2(\widehat{\Omega})$ (en d'autres termes, les fonctions $L^2(\widehat{\Omega})$ sur tout borné y compris au voisinage de la frontière).

Théorème 2.6. *L'espace H_{Dir} est un espace de Hilbert s'il est muni du produit scalaire*

$$(U, V)_{H_{\text{Dir}}} = \int_{\hat{\Omega}} \nabla U \cdot \nabla V d\mathbf{X}. \quad (2.118)$$

Preuve. Nous pouvons nous référer à [24]. \square

Remarque 2.9. *Nous avons l'inclusion d'espaces suivante*

$$H_{\text{Dir}} \subset H_{\text{Neu}}. \quad (2.119)$$

Théorème 2.7. *Soit $U \in L^2_{\text{loc}}(\hat{\Omega})$ tel que*

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}), \\ U(\mathbf{X}) = 0, \quad \text{pour } \mathbf{X} \in \Gamma_{\hat{B}}, \end{cases} \quad (2.120)$$

alors il existe une unique solution de

$$\begin{cases} U - \chi U_{\text{as}} \in H_{\text{Dir}}, \\ F - \Delta_{\mathbf{X}} U_{\text{as}} \in H_{\text{Dir}}^* \cap L^2_{\text{loc}}(\hat{\Omega}), \end{cases} \quad (2.121)$$

avec $\chi = 1$ au voisinage de l'infini et $\chi = 0$ au voisinage de l'obstacle.

Preuve. Analyse Nous voulons montrer que le problème de Dirichlet (2.120) est bien posé et que sa solution U est unique. Introduisons la nouvelle fonction inconnue

$$\tilde{U}(\mathbf{X}) = U(\mathbf{X}) - \chi U_{\text{as}}(\mathbf{X}) \in H_{\text{Dir}}, \quad (2.122)$$

Nous nous ramenons alors au problème (2.123) qui est bien posé.

$$\begin{cases} \Delta \tilde{U}(\mathbf{X}) = F(\mathbf{X}) - \Delta(\chi U_{\text{as}}(\mathbf{X})), \\ \tilde{U}(\mathbf{X}, t) \in H_{\text{Dir}}. \end{cases} \quad (2.123)$$

Synthèse Il existe un unique \tilde{U} solution du problème (2.123). Alors $\tilde{U} + \chi U_{\text{as}}$ est solution du problème (2.120). Nous avons ainsi l'existence de U . Enfin l'unicité de U découle de celle de \tilde{U} . Ceci termine la preuve. \square

Conclusion

Nous avons réutilisé les bases de représentation du chapitre 1 pour le développement modal en champ proche de notre solution. De plus, nous avons vu que le temps pouvait être considéré comme un paramètre. Ceci permet d'obtenir facilement des estimations des dérivées en temps de la solution en champ proche. Ce sera très utile dans l'étape de raccord pour identifier les termes de champ proche et de champ lointain qui se correspondent.

Chapitre 3

Définition du développement asymptotique à tout ordre

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commencerons par rappeler les définitions utiles pour la définition du développement asymptotique à tout ordre dans la section 3.1.1. Ensuite, dans les sections 3.2 et 3.3, en exploitant les conditions de raccord, nous définirons les termes des développements asymptotiques de champ proche et de champ lointain. Ces deux développements sont définis pour un système d'équations aux dérivées partielles comportant des singularités au voisinage de l'origine et de l'infini. Enfin, nous définirons une fonction de raccord et estimerons son erreur dans la section 3.4.

3.1.1 Rappels sur le champ lointain

En champ lointain nous pouvons développer la solution u_ε sous la forme

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(\mathbf{x}, t) \varepsilon^i, \quad (3.1)$$

avec u_i les fonctions définies sur $\Omega^\star \times \mathbb{R}$ et $\Omega^\star = \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Rappelons que les termes de ce développement vérifient les problèmes d'évolution obtenus au chapitre . Trouver $u_0 : \Omega^\star \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} c^2 \Delta u_0(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_0(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

et trouver $u_i : \Omega^\star \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i \geq 1$ tel que

$$\begin{cases} \Delta u_i(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} u_i(\mathbf{x}, t) = 0, \\ u_i(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \partial_t u_i(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Remarque 3.1. Ces problèmes ne sont pas bien posés car les fonctions u_i sont potentiellement singulières à l'origine, voir le chapitre 1.

Le développement (3.1) approche la solution de notre problème loin de l'obstacle. Nous justifierons cette affirmation dans le chapitre 4. Pour le moment nous n'avons aucun moyen d'assurer que cette série est convergente, nous ferons dans ce chapitre tous les calculs de façon formelle.

3.1.2 Rappels sur le champ proche

En champ proche nous pouvons développer la solution U_ε sous la forme

$$U_\varepsilon(\mathbf{X}, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} U_i(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i, \quad (3.4)$$

avec U_i les fonctions définies sur $\widehat{\Omega} \times \mathbb{R}$ et $\widehat{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{B}$. Rappelons que les termes de ce développement vérifient les problèmes d'évolution obtenus au chapitre . Trouver $U_i : \widehat{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U_{i+2}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} U_i(\mathbf{X}, t), \\ U_i(\mathbf{X}, 0) = 0, \quad \partial_t U_i(\mathbf{X}, 0) = 0, \\ U_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \forall i < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Remarque 3.2. Ces problèmes ne sont pas bien posés car les fonctions U_i sont potentiellement singulières au voisinage de l'infini, au sens de

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} |U(R, \theta, \varphi)| = +\infty, \quad (3.6)$$

voir le chapitre 2.

Le développement (3.4) approche la solution de notre problème au voisinage de l'obstacle. Nous justifierons cette affirmation dans le chapitre 4. Pour le moment nous n'avons aucun moyen d'assurer que cette série est convergente, nous ferons dans ce chapitre tous les calculs de façon formelle.

3.1.3 Conditions de raccord

Pour fermer les problèmes de champ lointain et de champ proche (les rendre bien posés), nous allons écrire des conditions de raccord, voir (65)

$$u_{i,p}(\theta, \varphi, t) = U_{i+p,p}(\theta, \varphi, t), \quad \text{pour } i \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{Z}. \quad (3.7)$$

Rappelons que $u_{i,p}$, respectivement $U_{i,p}$, sont les termes du développement au voisinage de $\mathbf{0}$, respectivement au voisinage de $+\infty$ des fonctions u_i , respectivement U_i

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=-\infty}^P u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p + \mathfrak{u}_i^P(\mathbf{x}, t), \\ U_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{p=-P}^{+\infty} U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p + \mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t), \end{cases} \quad (3.8)$$

avec $\mathfrak{u}_i^P(\mathbf{x}, t) = O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1})$ et $\mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t) = O_{R \rightarrow +\infty}(r^{-P-1})$. D'autre part, nous adoptons la convention

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}, t) = U_i(\mathbf{X}, t) \equiv 0, \quad \forall i < 0, \\ u_{i,p}(\theta, \varphi, t) = U_{i,p}(\theta, \varphi, t) \equiv 0, \quad \forall i < 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

3.2 Exploitation des conditions de raccord

3.2.1 Conséquence de la forme de l'Ansatz

Dans cette section, nous allons montrer que la forme de l'Ansatz, (3.1) et (3.4), limite les singularités des termes de champ lointain et les croissances des termes de champ proche. Commençons par le cas $i > 0$ et $p < -i$, nous avons $i + p < 0$. La convention (3.9) donne alors

$$U_{i+p}(\mathbf{X}, t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad U_{i+p,p}(\theta, \varphi, t) \equiv 0. \quad (3.10)$$

D'après la condition de raccord rappelée en (3.7), nous avons aussi

$$u_{i,p}(\theta, \varphi, t) = U_{i+p,p}(\theta, \varphi, t). \quad (3.11)$$

Il suit

$$u_{i,p}(\theta, \varphi, t) \equiv 0, \quad \forall i > 0 \text{ et } p < -i. \quad (3.12)$$

Remarque 3.3. La relation (3.12) permet de simplifier le développement des u_i

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=-i}^P u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p + \mathfrak{u}_i^P(\mathbf{x}, t), \quad (3.13)$$

avec $\mathfrak{u}_i^P(\mathbf{x}, t) = O_{r \rightarrow 0}(r^{P+1})$.

Voyons à présent la cas $i > 0$ et $p > i$, nous avons $i - p < 0$. La convention (3.9) donne alors

$$u_{i-p}(\mathbf{x}, t) \equiv 0 \quad \text{et} \quad u_{i-p,p}(\theta, \varphi, t) \equiv 0. \quad (3.14)$$

De plus, la condition de raccord (3.7) peut se réécrire sous la forme

$$U_{i,p}(\theta, \varphi, t) = u_{i-p,p}(\theta, \varphi, t). \quad (3.15)$$

Il suit

$$U_{i,p}(\theta, \varphi, t) \equiv 0, \quad \forall i > 0 \text{ et } p > i. \quad (3.16)$$

Remarque 3.4. La relation (3.16) permet de simplifier le développement des U_i

$$U_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{p=-P}^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p + \mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t), \quad (3.17)$$

avec $\mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t) = O_{R \rightarrow +\infty}(R^{-P-1})$.

3.2.2 Développement modal

Au chapitre 1, nous avons obtenu le développement modal des fonctions singulières de l'équation des ondes. Au voisinage de $\mathbf{0}$, respectivement de l'infini, les fonctions u_i , respectivement U_i , peuvent être développées à l'aide des harmoniques sphériques pol_n^m . Ces développements prennent la forme

$$\begin{cases} u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=-i}^P \sum_{m,n,\text{pol}} (u_{i,p})_{m,n}^{\text{pol}}(t) r^p \text{pol}_n^m(\theta, \varphi) + \mathfrak{u}_i^P(\mathbf{x}, t), \\ U_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{p=-P}^i \sum_{m,n,\text{pol}} (U_{i,p})_{m,n}^{\text{pol}}(t) R^p \text{pol}_n^m(\theta, \varphi) + \mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t), \end{cases} \quad (3.18)$$

avec

- la variable pol peut prendre les valeurs \cos ou \sin ,

– le symbole $\sum_{m,n,\text{pol}}$ doit être compris dans le sens suivant

$$\sum_{m,n,\text{pol}} f_{m,n}^{\text{pol}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \left(f_{m,n}^{\cos} + f_{m,n}^{\sin} \right), \quad (3.19)$$

– les fonctions \cos_n^m et \sin_n^m sont les harmoniques sphériques, voir (1.22).

De plus, nous avons trouvé aux chapitres 1 et 2 les formes de $(u_{i,p})_{m,n}^{\text{pol}}$ et de $(U_{i,p})_{m,n}^{\text{pol}}$ que nous rappelons ici

$$\begin{cases} (u_{i,p})_{m,n}^{\text{pol}}(t) = \widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[(a_i)_{m,n}^{\text{pol}}] + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[(b_i)_{m,n}^{\text{pol}}], \\ (U_{i,p})_{m,n}^{\text{pol}}(t) = \widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[(B_{i-p-n-1})_{m,n}^{\text{pol},-}] + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[(A_{i-p+n})_{m,n}^{\text{pol}}]. \end{cases} \quad (3.20)$$

Comme la famille pol_n^m est une famille libre, il suit que la condition de raccord peut aussi être écrite mode à mode

$$(u_{i,p})_{m,n}^{\text{pol}}(t) = (U_{i+p,p})_{m,n}^{\text{pol}}(t). \quad (3.21)$$

Il suit

$$\widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[(a_i)_{m,n}^{\text{pol}}] + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[(b_i)_{m,n}^{\text{pol}}] = \widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[(B_{i-n-1})_{m,n}^{\text{pol},-}] + \widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[(A_{i+n})_{m,n}^{\text{pol}}]. \quad (3.22)$$

En identifiant nous obtenons les relations de raccord que nous explicitons dans le théorème 3.1.

Théorème 3.1. *Les coefficients des termes de champ proche et des termes de champ lointain sont reliées par*

$$\begin{cases} (a_i)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = (B_{i-n-1})_{m,n}^{\text{pol},-}(t), & \text{pour } n \leq i-1, \\ (b_i)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = (A_{i+n})_{m,n}^{\text{pol}}(t) \Leftrightarrow (A_i)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = (b_{i-n})_{m,n}^{\text{pol}}(t), & \text{pour } n \leq i. \end{cases} \quad (3.23)$$

La première relation relie les singularités du champ lointain aux termes décroissants du champ proche. La seconde relie les termes réguliers du champ proche aux termes croissants du champ lointain.

3.3 Définition des termes du développement asymptotique

Pour définir les termes du développement asymptotique, nous agissons par récurrence.

Initialisation :

Champ lointain

La fonction u_0 est la solution régulière sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ du problème

$$\begin{cases} c^2 \Delta u_0(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_0(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Au voisinage de l'origine nous avons, d'après le corollaire 1.2

$$u_0(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} \text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[(b_0)_{m,n}^{\text{pol}}]. \quad (3.25)$$

Cette relation définit les fonctions du temps $(b_0)_{m,n}^{\text{pol}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Champ proche

Nous introduisons la partie non variationnelle

$$U_{0,\text{sing}}(\mathbf{X}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} \text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[(A_0)_{m,n}^{\text{pol}}]. \quad (3.26)$$

Ceci se simplifie en

$$U_{0,\text{sing}}(\mathbf{X}, t) = \text{Reg}_{0,0}^{\text{cos}}[(b_0)_{0,0}^{\text{cos}}], \quad (3.27)$$

à l'aide d'une part des conditions de raccord

$$\begin{cases} (A_0)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = 0, & \forall n \geq 1, \\ (A_0)_{0,0}^{\text{cos}}(t) = (b_0)_{0,0}^{\text{cos}}(t). \end{cases} \quad (3.28)$$

et d'autre part en remarquant que

$$\text{Reg}_{0,0}^{\text{sin}}[(A_0)_{0,0}^{\text{sin}}] = 0. \quad (3.29)$$

Nous pouvons alors définir U_0 comme la solution de

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbf{X}} U_0(\mathbf{X}, t) = 0, \\ U_0(\mathbf{X}, t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\omega_\varepsilon}, \\ U_0(\mathbf{X}, t) - \chi(R) U_{0,\text{sing}}(\mathbf{X}, t) \in H_{\text{Dir}}, \end{cases} \quad (3.30)$$

avec

$$\begin{aligned} \chi(R) &= 0, & \text{pour} \quad R < R^*, \\ \chi(R) &= 1, & \text{pour} \quad R > 2R^*. \end{aligned}$$

Le premier terme du développement de champ proche en l'infini s'écrit sous la forme

$$U_0(\mathbf{X}, t) = U_{0,\text{sing}}(\mathbf{X}, t) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},-}[(B_0)_{m,n}^{\text{pol}}]. \quad (3.31)$$

Ceci définit les fonctions $(B_0)_{m,n}^{\text{pol}} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$.

Remarque 3.5. Dans le cas d'un obstacle sphérique centré en l'origine, nous obtenons

$$U_0(\mathbf{X}, t) = (1 - \frac{1}{R}) u_0(\mathbf{0}, t). \quad (3.32)$$

Itération : (pour $i \geq 1$)

A cette étape, nous avons défini, pour $j \leq i-1$, les termes du champ lointain u_j , les termes du champ proche U_j et leurs coefficients de développement modal $(a_j)_{m,n}^{\text{pol}}$, $(b_j)_{m,n}^{\text{pol}}$, $(A_j)_{m,n}^{\text{pol}}$ et $(B_j)_{m,n}^{\text{pol}}$.

Champ lointain

Nous définissons u_i par la formule explicite

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},-}[(a_i)_{m,n}^{\text{pol}}], \quad (3.33)$$

avec $(a_i)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = (B_{i-n-1})_{m,n}^{\text{pol}}(t)$ pour $n < i$ et $(a_i)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = 0$ pour $n \geq i$. Cette relation se simplifie en

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^{i-1} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} M_{m,n}^{\text{pol},-}[(B_{i-n-1})_{m,n}^{\text{pol}}]. \quad (3.34)$$

Remarque 3.6. Dans le développement modal, il n'y a pas de termes réguliers car la solution u_i n'a pas de terme source en dehors de $\mathbf{x} = 0$, voir le corollaire 1.1. Ceci s'écrit

$$(b_i)_{m,n}^{\text{pol}}(t) = 0 \quad \forall i \geq 1. \quad (3.35)$$

Champ proche

Nous définissons la partie non variationnelle de U_j connaissant tous les U_j pour $j \leq i-1$ et tous les u_j pour $j \leq i$. En tenant compte des relations de raccord

$$\begin{aligned} (A_i)_{m,n}^{\text{pol}}(t) &= (b_{i-n})_{m,n}^{\text{pol}}(t), \quad \text{pour } n \leq i, \\ &= 0, \quad \text{pour } n > i. \end{aligned}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} U_{i,\text{sing}}(\mathbf{X}, t) &= \sum_{\ell=0}^i \sum_{n=0}^{i-\ell} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}}[(b_{i-n-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell} \\ &+ \sum_{\ell=1}^i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-}[(B_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{-n-1+\ell}. \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à définir la partie régulière de U_i

$$U_{i,\text{reg}}(\mathbf{X}, t) = U_i(\mathbf{X}, t) - \chi(R)U_{i,\text{sing}}(\mathbf{X}, t), \quad (3.36)$$

avec

$$\begin{aligned} \chi(R) &= 0, \quad \text{pour } R < R^*, \\ \chi(R) &= 1, \quad \text{pour } R > 2R^*. \end{aligned}$$

Remarquons que le support de χ est inclus dans $B_{R^*}^c$. La fonction $U_{i,\text{reg}}$ vérifie

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbf{X}} U_{i,\text{reg}}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial_t^2}{c^2} U_{i-2}(\mathbf{X}, t) - \Delta_{\mathbf{X}} [\chi(R)U_{i,\text{sing}}(\mathbf{X}, t)], \quad \text{pour } R \leq 2R^*, \\ &= 0 \quad \text{pour } R > 2R^*. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors obtenir le développement modal de U_i à l'infini

$$\begin{aligned} U_i(\mathbf{X}, t) &= \sum_{\ell=0}^i \sum_{n=0}^{i-\ell} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} \text{Reg}_{m,n,n+\ell}^{\text{pol}}[(b_{i-n-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{n+\ell} \\ &+ \sum_{\ell=0}^i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-}[(B_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{-n-1+\ell}. \end{aligned}$$

Maintenant, en tenant compte de la remarque 3.6

$$(b_{i-n-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}(t) = 0, \quad \forall i - n - \ell \geq 1. \quad (3.37)$$

Le seul cas non nul est pour $n = i - \ell$. Il suit

$$\begin{aligned} U_i(\mathbf{X}, t) &= \sum_{\ell=0}^i \sum_{m=0}^{i-\ell} \sum_{\text{pol}} \text{Reg}_{m,i-\ell,i}^{\text{pol}}[(b_0)_{m,i-\ell}^{\text{pol}}] R^i \\ &+ \sum_{\ell=0}^i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\text{pol}} M_{m,n,-n-1+\ell}^{\text{pol},-}[(B_{i-\ell})_{m,n}^{\text{pol}}] R^{-n-1+\ell}. \end{aligned}$$

3.4 La fonction de raccord

3.4.1 Définitions

Dans cette section, nous introduisons une fonction de raccord qui contient tous les termes des développements spatiaux de u_i et des U_i mis en jeu dans le raccord d'ordre I .

Définition 3.1. Soit $\text{rac}_{\varepsilon, I}$ la fonction de raccord d'ordre I donnée par

$$\text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{p=-i}^{I-i} \varepsilon^i u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p. \quad (3.38)$$

Remarque 3.7. La définition de la fonction de raccord est en variables de champ lointain. Rappelons que $u_{i,p}$ est le terme d'ordre p du développement de Taylor généralisé de u_i pour r tendant vers 0

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=-i}^P u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p + u_i^P. \quad (3.39)$$

Lemme 3.1. En variables de champ proche, notons la fonction de raccord d'ordre I $\text{Rac}_{\varepsilon, I}$. Elle est donnée par

$$\text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{p=i-I}^i \varepsilon^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p. \quad (3.40)$$

Preuve. Nous allons maintenant montrer que cette définition est consistante. Partons de la définition (3.38), nous avons en passant en variables $\mathbf{X} = \mathbf{x}/\varepsilon$

$$\text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) := \text{rac}_{\varepsilon, I}(\varepsilon \mathbf{X}, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{p=-i}^{I-i} \varepsilon^{i+p} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p. \quad (3.41)$$

Effectuons le changement de variable $i = i + p$

$$\text{rac}_{\varepsilon, I}(\varepsilon \mathbf{X}, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{p=i-I}^i \varepsilon^i u_{i-p,p}(\theta, \varphi, t) R^p. \quad (3.42)$$

Les indices des sommes sont non triviaux, détaillons leur obtention. Nous partons de

$$\begin{cases} 0 \leq i \leq I \\ -i \leq p \leq I - i, \end{cases} \quad (3.43)$$

en effectuant le changement de variable $j = i + p$, nous obtenons

$$\begin{cases} p \leq j \leq I + p \\ 0 \leq j \leq I. \end{cases} \quad (3.44)$$

La première nous donne à la fois $j - I \leq p$ et $p \leq j$, la seconde $j \in [0, I]$. Enfin en utilisant la condition de raccord (3.7), nous obtenons

$$\text{rac}_{\varepsilon, I}(\varepsilon \mathbf{X}, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{p=i-I}^i \varepsilon^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p. \quad (3.45)$$

Il est donc naturel de poser la définition (3.40). □

3.4.2 Estimation d'erreur de la fonction de raccord

Dans cette section, nous allons montrer que la fonction de raccord que nous avons définie précédemment en 3.4.1 est valable dans la zone intermédiaire à la fois proche des développements de champ proche et lointain tronqués à l'ordre I . Nous allons donc estimer l'erreur entre la fonction de raccord et les solutions des domaines champ lointain et champ proche grâce au lemme 3.2. Nous ferons ensuite le même calcul pour le gradient des fonctions dans le lemme 3.3.

Rappelons qu'au chapitre , nous avons vu que la zone de raccord Ω_ε^r était une couronne de petit rayon η_f et de grand rayon η_n . Nous avons vu également que $\eta_f = \eta_f(\varepsilon)$ et $\eta_n = \eta_n(\varepsilon)$ sont des fonctions positives de ε qui vérifient

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_f(\varepsilon) = 0 & \text{et} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta_n(\varepsilon) = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_f(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty & \text{et} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta_n(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty. \end{cases} \quad (3.46)$$

Lemme 3.2. *Plaçons nous sur le couronne $C_{\eta_f}^{\eta_n}$. Nous avons l'erreur entre la solution du champ lointain et la fonction de raccord qui vérifie*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})} = O(\eta_n^{I+1}). \quad (3.47)$$

Nous avons l'erreur entre la solution du champ proche et la fonction de raccord qui vérifie

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) - \text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})} = O\left(\left(\frac{\eta_f}{\varepsilon}\right)^{-I-1}\right). \quad (3.48)$$

Preuve. Notons

$$e(\mathbf{x}, t) = \max_{0 \leq t \leq T} \|u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})}. \quad (3.49)$$

Par définition nous avons

$$e(\mathbf{x}, t) = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{i=0}^I \varepsilon^i u_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=0}^I \varepsilon^i \sum_{p=-i}^{I-i} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})}. \quad (3.50)$$

Il suit

$$e(\mathbf{x}, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=0}^I \varepsilon^i \left\| u_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{p=-i}^{I-i} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})}. \quad (3.51)$$

En écrivant u_i sous la forme (3.13) pour $P = I - i$, nous obtenons

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| u_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{p=-i}^{I-i} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})} \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|u_i^{I-i}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})}. \quad (3.52)$$

D'après le lemme 1.6 nous obtenons

$$\varepsilon^i \max_{0 \leq t \leq T} \|u_i^{I-i}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})} \leq \text{Cte} \eta_n^{I-i+1}(\varepsilon) \varepsilon^i.$$

Comme $\varepsilon \leq \eta_n$, nous avons

$$e(\mathbf{x}, t) \leq \text{Cte} \sum_{i=0}^I \varepsilon^i \eta_n^{I-i+1}(\varepsilon) \leq \text{Cte} \eta_n^{I+1}(\varepsilon). \quad (3.53)$$

Nous obtenons ainsi la première égalité. Pour la seconde, notons

$$E(\mathbf{X}, t) = \max_{0 \leq t \leq T} \|U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) - \text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})}. \quad (3.54)$$

Par définition nous avons

$$E(\mathbf{X}, t) = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \sum_{i=0}^I \varepsilon^i U_i(\mathbf{X}, t) - \sum_{i=0}^I \varepsilon^i \sum_{p=i-I}^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})}. \quad (3.55)$$

Il suit

$$E(\mathbf{X}, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=0}^I \varepsilon^i \left\| U_i(\mathbf{X}, t) - \sum_{p=i-I}^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})}. \quad (3.56)$$

En écrivant U_i sous la forme (3.17) pour $P = I - i$, nous obtenons

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| U_i(\mathbf{X}, t) - \sum_{p=i-I}^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})} \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathfrak{U}_i^{I-i}(\mathbf{X}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})}. \quad (3.57)$$

D'après le lemme 2.1, lorsque ε tend vers 0, nous obtenons

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathfrak{U}_i^{I-i}(\mathbf{X}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})} \leq \text{Cte} \left(\frac{\eta_f}{\varepsilon} \right)^{i-I-1}. \quad (3.58)$$

Il suit

$$\varepsilon^i \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathfrak{U}_i^{I-i}(\mathbf{X}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})} \leq \text{Cte} \eta_f^i \left(\frac{\eta_f}{\varepsilon} \right)^{-I-1}, \quad (3.59)$$

car $\eta_f < 1$ quand ε tend vers 0. Nous obtenons finalement

$$E(\mathbf{X}, t) \leq \text{Cte} \sum_{i=0}^I \eta_f^i \left(\frac{\eta_f}{\varepsilon} \right)^{-I-1} \leq \text{Cte} \left(\frac{\eta_f}{\varepsilon} \right)^{-I-1}. \quad (3.60)$$

Ceci termine la preuve du lemme. \square

Passons au lemme pour les gradients. Commençons par définir le gradient en variable \mathbf{X} : $\nabla_{\mathbf{X}} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla$, avec ∇ le gradient en coordonnées cartésiennes.

Lemme 3.3. *Plaçons nous sur le couronne $C_{\eta_f}^{\eta_n}$. Nous avons l'erreur entre le gradient de la solution du champ lointain et le gradient de la fonction de raccord qui vérifie*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla(u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t))\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})} = O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta_n^I). \quad (3.61)$$

Nous avons l'erreur entre la solution du champ proche et la fonction de raccord qui vérifie

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla_{\mathbf{X}}(U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) - \text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t))\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})} = O_{\varepsilon \rightarrow 0}\left(\left(\frac{\eta_f}{\varepsilon}\right)^{-I-2}\right). \quad (3.62)$$

Preuve. Notons

$$e(\mathbf{x}, t) = \max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla(u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t))\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})}. \quad (3.63)$$

Par définition nous avons

$$e(\mathbf{x}, t) = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla \left(\sum_{i=0}^I \varepsilon^i u_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=0}^I \varepsilon^i \sum_{p=-i}^{I-i} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \right) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})}. \quad (3.64)$$

Il suit

$$e(\mathbf{x}, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=0}^I \varepsilon^i \left\| \nabla \left(u_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{p=-i}^{I-i} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \right) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})}. \quad (3.65)$$

En écrivant u_i sous la forme (3.13) pour $P = I - i$, nous obtenons

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla \left(u_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{p=-i}^{I-i} u_{i,p}(\theta, \varphi, t) r^p \right) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})} = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla \mathbf{u}_i^{I-i}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})}. \quad (3.66)$$

D'après le lemme 1.6 nous obtenons

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla \mathbf{u}_i^{I-i}(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f}^{\eta_n})} \leq C \eta_n^{I-i}(\varepsilon). \quad (3.67)$$

Comme $\varepsilon \leq \eta_n$, nous avons

$$e(\mathbf{x}, t) \leq C \eta_n^I(\varepsilon). \quad (3.68)$$

Nous obtenons ainsi la première égalité. Pour la seconde, notons

$$E(\mathbf{X}, t) = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla_{\mathbf{X}} \left(U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) - \text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) \right) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})}. \quad (3.69)$$

Par définition nous avons

$$E(\mathbf{X}, t) = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla_{\mathbf{X}} \left(\sum_{i=0}^I \varepsilon^i U_i(\mathbf{X}, t) - \sum_{i=0}^I \varepsilon^i \sum_{p=i-I}^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p \right) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})}. \quad (3.70)$$

Il suit

$$E(\mathbf{X}, t) \leq \max_{0 \leq t \leq T} \sum_{i=0}^I \varepsilon^i \left\| \nabla_{\mathbf{X}} \left(U_i(\mathbf{X}, t) - \sum_{p=i-I}^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p \right) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})}. \quad (3.71)$$

En écrivant U_i sous la forme (3.17) pour $P = I - i$, nous obtenons

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla_{\mathbf{X}} \left(U_i(\mathbf{X}, t) - \sum_{p=i-I}^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p \right) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})} = \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_i^{I-i}(\mathbf{X}, t) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})}. \quad (3.72)$$

D'après le lemme 2.1, lorsque ε tend vers 0, nous obtenons

$$\max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_i^{I-i}(\mathbf{X}, t) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})} \leq C \left(\frac{\eta_f}{\varepsilon} \right)^{i-I-2}. \quad (3.73)$$

Il suit

$$\varepsilon^i \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}_i^{I-i}(\mathbf{X}, t) \right\|_{L^\infty(C_{\eta_f/\varepsilon}^{\eta_n/\varepsilon})} \leq C \left(\frac{\eta_f}{\varepsilon} \right)^{-I-2}, \quad (3.74)$$

car $\eta_f < 1$ quand ε tend vers 0. Nous obtenons finalement

$$E(\mathbf{X}, t) \leq C \left(\frac{\eta_f}{\varepsilon} \right)^{-I-2}. \quad (3.75)$$

Ceci termine la preuve du lemme. \square

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons déterminé la solution valide sur tout le domaine en exploitant les conditions de raccord. Nous avons également donné une estimation de l'erreur de raccord dans la zone intermédiaire en introduisant une fonction de raccord à la fois en variables de champ lointain et de champ proche. Nous exploiterons ce résultat dans le chapitre 4.

Chapitre 4

Justification mathématique du développement asymptotique : estimation d'erreurs

L'objectif de ce chapitre est de démontrer que les séries de champ lointain et de champ proche sont bien des approximations d'ordre I de la solution exacte \tilde{u}_ε . Cette étape passe par une preuve de consistance et stabilité.

4.1 Approximation de la solution en champ lointain, champ proche

Rappelons notre domaine $\Omega_\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \omega_\varepsilon$ en variables de champ lointain et $\widehat{\Omega} = \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{B}$ en variables de champ proche. Nous allons dans cette section définir des approximations dans plusieurs zones de la solution $\tilde{u}_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^+)$

$$\begin{cases} \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - c^2 \Delta \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) & \text{sur } \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^+ \\ \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{sur } \Omega_\varepsilon \times \mathbb{R}^- \\ \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_{\omega_\varepsilon} \times \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.1)$$

avec $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}$. Dans le domaine de champ lointain

$$B_{r^*}^c = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| > r^*\}, \quad (4.2)$$

avec $r^* > \varepsilon$, nous considérerons une approximation de la solution exacte à partir du développement formel que nous avons obtenu dans le chapitre 3

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(\mathbf{x}, t) \varepsilon^i. \quad (4.3)$$

Dans le domaine de champ proche

$$\widehat{B}_{R^*} \setminus \widehat{B} = \{\mathbf{X} \in \widehat{\Omega} : |\mathbf{X}| < R^*\}, \quad (4.4)$$

avec $R^* > 1$, nous construirons une approximation de la solution exacte à partir de la série du champ proche

$$U_\varepsilon(\mathbf{X}, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} U_i(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i, \quad (4.5)$$

avec $\mathbf{x} = \mathbf{X}\varepsilon$. L'objet de ce chapitre est de démontrer les deux résultats suivants.

Théorème 4.1. *Pour tout $r^* > 0$, nous avons l'estimation d'erreur*

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot, t) - u_{\varepsilon, I}(\cdot, t)\|_{L^2(B_{r^*}^c)} = O(\varepsilon^{I+1}), \quad (4.6)$$

avec \tilde{u}_ε la solution exacte et $u_{\varepsilon, I}$ la troncature de la série de la solution du champ lointain

$$u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=0}^I u_i(\mathbf{x}, t) \varepsilon^i. \quad (4.7)$$

Théorème 4.2. *Pour tout $R^* > 0$, nous avons l'estimation d'erreur*

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{X}\varepsilon, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t)\|_{L^2(\widehat{B}_{R^*} \setminus \widehat{B})} = O(\varepsilon^{I+1}), \quad (4.8)$$

avec $U_{\varepsilon, I}$ la troncature de la série de la solution du champ proche

$$U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) = \sum_{i=0}^I U_i(\mathbf{X}, t) \varepsilon^i. \quad (4.9)$$

Ces deux résultats ne peuvent être obtenus directement, nous allons passer par l'introduction d'une approximation uniformément valide. Celle-ci nécessite une nouvelle échelle

$$\eta = \sqrt{\varepsilon}, \quad (4.10)$$

qui est beaucoup plus grande que l'échelle du champ proche mais beaucoup plus petite que celle du champ lointain. Notons $\chi^\eta(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/\eta)$ une fonction de troncature avec

$$\begin{cases} \chi^\eta(\mathbf{x}) = 0, & \text{pour } |\mathbf{x}| < \eta \\ \chi^\eta(\mathbf{x}) = 1, & \text{pour } |\mathbf{x}| > 2\eta \\ \chi^\eta(\mathbf{x}) \in [0, 1] & \text{pour } |\mathbf{x}| \in [\eta, 2\eta] \end{cases} \quad (4.11)$$

Voir la figure 4.1.

Remarque 4.1. *La fonction de troncature χ^η permet de s'intéresser au champ lointain et $1 - \chi^\eta$ au champ proche.*

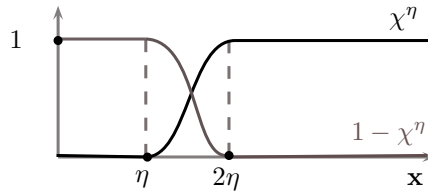


FIGURE 4.1 – Fonctions de troncature

Afin de démontrer les deux théorèmes 4.1 et 4.2, nous introduisons l'approximation uniformément valide

$$\tilde{u}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) = \chi^\eta(\mathbf{x}) u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) + (1 - \chi^\eta(\mathbf{x})) U_{\varepsilon, I}\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, t\right). \quad (4.12)$$

Remarque 4.2. Cette fonction $\tilde{u}_{\varepsilon,I}$ coïncide avec $u_{\varepsilon,I}$ sur le domaine de champ lointain et avec $U_{\varepsilon,I}$ sur le domaine de champ proche. Plus précisément, nous avons

$$\tilde{u}_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t) = u_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t) \quad (4.13)$$

pour $|\mathbf{x}| > r^*$ et ε assez petit et

$$\tilde{u}_{\varepsilon,I}(\mathbf{X}\varepsilon, t) = U_{\varepsilon,I}(\mathbf{X}, t) \quad (4.14)$$

pour $|\mathbf{X}| < R^*$ et ε assez petit. Dans la zone intermédiaire, elle est une moyenne pondérée de $u_{\varepsilon,I}$ et $U_{\varepsilon,I}$.

Par un argument de consistance et de stabilité, nous montrerons que l'approximation uniformément valide vérifie le théorème 4.3.

Théorème 4.3. Pour $\tilde{e}_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) - \tilde{u}_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t)$, nous avons

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{e}_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon})} = O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}). \quad (4.15)$$

4.2 Stabilité

Dans la section 1.3.3, nous avons obtenu l'inégalité (1.186) que nous réutiliserons ici, en particulier pour démontrer le théorème 4.4 qui est le résultat principal de cette section et qui majore une fonction par son D'Alembertien $\square = -\frac{\partial_t^2}{c^2} + \Delta$.

Théorème 4.4. Munissons $u_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon} \times \mathbb{R}^+)$ des conditions initiales

$$u_{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t u_{\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad (4.16)$$

et de la condition de Dirichlet

$$u_{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_{\varepsilon} \times \mathbb{R}^+. \quad (4.17)$$

Supposons de plus que $\text{supp}(\square u_{\varepsilon}) \subset \Omega_{\varepsilon, r_s} := \Omega_{\varepsilon} \cap B_{r_s}$, pour $r_s > 0$, alors u_{ε} vérifie

$$\forall T > 0, \quad \max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon})} \leq C_{r_s}(T) \max_{t \leq T} \|\square u_{\varepsilon}(\cdot, t)\|_{L^{\infty}(\Omega_{\varepsilon, r_s})}, \quad (4.18)$$

avec $C_{r_s}(T)$ une fonction au plus quadratique de T .

Remarque 4.3. L'inégalité du théorème 4.4 est uniquement utile en temps court, pour l'étude en temps long, il faut utiliser d'autres outils qui sortent du contexte de cette thèse.

Remarque 4.4. Nous pouvons faire mieux au niveau des espaces.

Avant de commencer la preuve du théorème 4.4, montrons quelques résultats préliminaires.

4.2.1 Stabilité d'un problème sur domaine borné

Lemme 4.1 (Inégalité de Poincaré). Pour tout $R_{\diamond} > 0$ et $u \in H_0^1([-R_{\diamond}, R_{\diamond}]^3)$ nous avons

$$\|u\|_{L^2([-R_{\diamond}, R_{\diamond}]^3)} \leq \frac{2R_{\diamond}}{\sqrt{3}\pi} \|\nabla u\|_{L^2([-R_{\diamond}, R_{\diamond}]^3)}. \quad (4.19)$$

Preuve. Pour démontrer ce résultat, plaçons nous sur le cube $D_{R_{\diamond}} := [-R_{\diamond}, R_{\diamond}]^3$. Soit le produit $w_{n,p,q}(\mathbf{x}) := w_n(x)w_p(y)w_q(z)$ avec n, p et q des entiers supérieurs ou égaux à 1 et

$$w_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi(x + R_{\diamond})}{2R_{\diamond}}\right), \quad w_p(y) = \sin\left(\frac{p\pi(y + R_{\diamond})}{2R_{\diamond}}\right), \quad w_q(z) = \sin\left(\frac{q\pi(z + R_{\diamond})}{2R_{\diamond}}\right). \quad (4.20)$$

Remarque 4.5. Rappelons que la famille $w_{n,p,q}$ est une base orthogonale de $H_0^1(D_{R_\diamond})$.

Dans cette base nous avons

$$\Delta w_{n,p,q}(\mathbf{x}) = -\frac{\pi^2}{(2R_\diamond)^2}(n^2 + p^2 + q^2)w_{n,p,q}(\mathbf{x}). \quad (4.21)$$

Il suit

$$\int_{[-R_\diamond, R_\diamond]^3} (\Delta w_{n,p,q}(\mathbf{x})) w_{n,p,q}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{[-R_\diamond, R_\diamond]^3} \frac{\pi^2}{4R_\diamond^2} (n^2 + p^2 + q^2) (w_{n,p,q}(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}. \quad (4.22)$$

La formule de Green donne

$$\|\nabla w_{n,p,q}\|_{L^2([-R_\diamond, R_\diamond]^3)}^2 = \frac{\pi^2}{4R_\diamond^2} (n^2 + p^2 + q^2) \|w_{n,p,q}\|_{L^2([-R_\diamond, R_\diamond]^3)}^2 \geq \frac{3\pi^2}{4R_\diamond^2} \|w_{n,p,q}\|_{L^2([-R_\diamond, R_\diamond]^3)}^2. \quad (4.23)$$

Soient $u \in H_0^1(D_{R_\diamond})$ et $u_{n,p,q} \in \mathbb{R}$ les coordonnées de u dans la base $w_{n,p,q}$

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{n,p,q \geq 1} u_{n,p,q} w_{n,p,q}(\mathbf{x}). \quad (4.24)$$

Il suit

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2(D_{R_\diamond})}^2 &= \sum_{n,p,q \geq 1} |u_{n,p,q}|^2 \|\nabla w_{n,p,q}\|_{L^2(D_{R_\diamond})}^2 \\ &\geq \frac{3\pi^2}{4R_\diamond^2} \sum_{n,p,q \geq 1} |u_{n,p,q}|^2 \|w_{n,p,q}\|_{L^2(D_{R_\diamond})}^2 = \frac{3\pi^2}{4R_\diamond^2} \|u\|_{L^2(D_{R_\diamond})}^2. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. \square

Corollaire 4.1 (Estimation de Weyl). *Pour tout $R_\diamond > 0$ et $u \in H_0^1(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})$, avec $\Omega_{\varepsilon, R_\diamond} = \Omega_\varepsilon \cap B_{R_\diamond}$, nous avons*

$$\|u\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq \frac{2R_\diamond}{\sqrt{3}\pi} \|\nabla u\|_{L^2([-R_\diamond, R_\diamond]^3)}. \quad (4.25)$$

Preuve. Comme $\Omega_{\varepsilon, R_\diamond} \subset D_{R_\diamond}$, nous avons $H_0^1(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond}) \subset H_0^1(D_{R_\diamond})$ quitte à prolonger les éléments de $H_0^1(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})$ par 0 sur D_{R_\diamond} hors de $\Omega_{\varepsilon, R_\diamond}$. Nous partons du lemme 4.1 et puisque $\|u\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})}^2 \leq \|u\|_{L^2(D_{R_\diamond})}^2$, nous obtenons le résultat attendu. \square

Remarque 4.6. Nous avons majoré la constante sur $\Omega_{\varepsilon, R_\diamond}$ à partir de celle sur le cube D_{R_\diamond} . Nous pouvons aussi calculer la constante optimale à partir de la séparation de variables sur la sphère mais ceci est plus difficile à présenter.

Nous pouvons à présent passer à la démonstration du théorème 4.4.

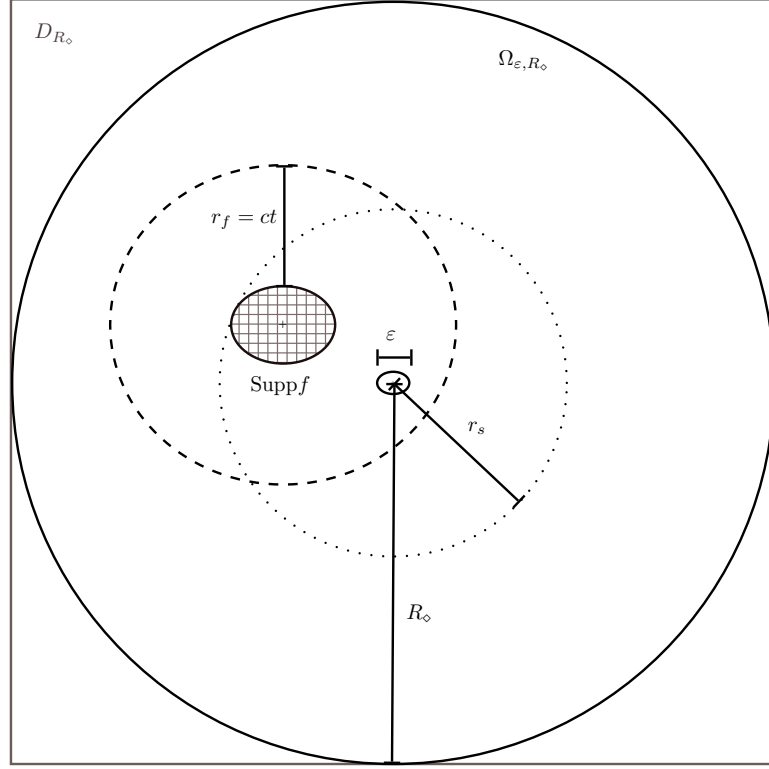
4.2.2 Preuve du théorème 4.4

Preuve du théorème 4.4. Commençons par noter $r_f(t) := ct$ la distance parcourue par l'onde depuis la source f au temps t , voir figure 4.2. Rappelons que l'équation des ondes propage l'information à vitesse finie c . Ainsi si le support de la source f est inclus dans la boule de rayon r_s pour tout temps $t > 0$ alors la solution est nulle hors de la boule de rayon $r_s + ct$. Traduisons le fait que la solution est nulle avant l'arrivée de l'onde par : pour tout $t > 0$

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{pour} \quad r > r_s + r_f(t), \quad (4.26)$$

c'est à dire

$$\text{supp}(u_\varepsilon(\cdot, t)) \subset B_{r_s + ct}. \quad (4.27)$$

FIGURE 4.2 – Domaine $\Omega_{\varepsilon, R_0}$

Notons $u_{\varepsilon, dir, R_0}$ la solution du problème avec des conditions de Dirichlet sur $\Gamma_{R_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = R_0\}$

$$\begin{cases} \square u_{\varepsilon, dir, R_0}(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) & \text{sur } \Omega_{\varepsilon, R_0} \times \mathbb{R}^+, \\ u_{\varepsilon, dir, R_0}(\mathbf{x}, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_{R_0} \times \mathbb{R}^+, \\ u_{\varepsilon, dir, R_0}(\mathbf{x}, 0) = 0 \text{ et } \partial_t u_{\varepsilon, dir, R_0}(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{sur } \Omega_{\varepsilon, R_0}, \end{cases} \quad (4.28)$$

avec $\square = \Delta - \frac{\partial_t^2}{c^2}$. Nous avons

$$u_{\varepsilon}(\cdot, t) \equiv u_{\varepsilon, dir, R_0}(\cdot, t), \quad \forall t < \frac{R_0 - r_s}{c}. \quad (4.29)$$

L'introduction de cette frontière fictive ne modifie donc pas u_{ε} car elle se situe hors du support de u_{ε} .

Remarque 4.7. Nous introduisons $u_{\varepsilon, dir, R_0}$ car nous connaissons l'estimation pour cette fonction

$$\max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, dir, R_0}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_0})} \leq T \max_{t \leq T} \|\square u_{\varepsilon, dir, R_0}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_0})}. \quad (4.30)$$

En effet, posons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 \Delta & 0 \end{pmatrix}$, $U_{\varepsilon, dir} = \begin{pmatrix} u_{\varepsilon, dir, R_0}(\mathbf{x}, t) \\ \partial_t u_{\varepsilon, dir, R_0}(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$, $H = H_0^1(\Omega_{\varepsilon, R_0}) \times L^2(\Omega_{\varepsilon, R_0})$,

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ -c^2 f(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}, \text{ nous avons}$$

$$D(A) = H_{\text{dir}}^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond}) \times H_0^1(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond}) \quad \text{et} \quad \partial_t U + AU = F. \quad (4.31)$$

Rappelons, voir [10], que A est un opérateur maximal monotone sur H muni du produit scalaire

$$(U_1, U_2)_H = (\nabla u_1(\cdot, t), \nabla u_2(\cdot, t))_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} + (v_1(\cdot, t), v_2(\cdot, t))_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})}, \quad (4.32)$$

avec $U_i = \begin{pmatrix} u_i(\mathbf{x}, t) \\ v_i(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix}$. La solution est de la forme

$$U_{\varepsilon, \text{dir}} = \int_0^t \exp[-A(s-t)] F(\cdot, s) ds. \quad (4.33)$$

Il suit

$$\max_{t \leq T} \|U_{\varepsilon, \text{dir}}\|_H \leq \max_{t \leq T} \int_0^t \|f(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, r_s})} ds \leq T \max_{t \leq T} \|f(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, r_s})}. \quad (4.34)$$

En particulier

$$\forall T > 0, \quad \max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, \text{dir}, R_\diamond}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq T \max_{t \leq T} \|\square u_{\varepsilon, \text{dir}, R_\diamond}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, r_s})}. \quad (4.35)$$

Il suit que pour tout $t < \frac{R_\diamond - r_s}{c}$

$$\max_{t \leq T} \|\nabla u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} = \max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, \text{dir}, R_\diamond}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq T \max_{t \leq T} \|\square u_{\varepsilon, \text{dir}, R_\diamond}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, r_s})}, \quad (4.36)$$

d'après (4.30). Appliquons à présent l'inégalité de Poincaré

$$\max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon, \text{dir}, R_\diamond}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq \frac{2(r_s + cT)}{\sqrt{3}\pi} \max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, \text{dir}, R_\diamond}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, r_s})}. \quad (4.37)$$

D'après l'inégalité de Young nous obtenons donc pour tout $t > 0$

$$\max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon, \text{dir}, R_\diamond}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq \frac{2T(r_s + cT)}{\sqrt{3}\pi} \|1\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, r_s})} \max_{t \leq T} \|\square u_{\varepsilon, \text{dir}, R_\diamond}(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, r_s})}. \quad (4.38)$$

Remarquons que $\|1\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, r_s})}$ ne dépend pas du temps. Une dernière subtilité subsiste pour passer de $\|u_{\varepsilon, \text{dir}, R_\diamond}(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})}$ à $\|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$. Il suffit simplement de dire que u_ε est nulle pour tout $r > R_\diamond$. Nous obtenons donc le théorème 4.4. \square

4.3 Consistance

Dans cette partie nous nous intéressons à l'erreur commise en tronquant la série \tilde{u}_ε à I . Rappelons que

$$\tilde{e}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) = \tilde{u}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad (4.39)$$

et que le D'Alembertien s'écrit $\square = -\frac{\partial_t^2}{c^2} + \Delta$. Le but de cette section est de prouver le résultat de consistance donné par le théorème 4.5 suivant.

Théorème 4.5. *Nous avons $\tilde{e}_{\varepsilon, I}$, l'erreur commise en tronquant la série à l'ordre I , qui vérifie*

$$\max_{t \leq T} \|\square \tilde{e}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq O(\eta^{I-1}), \quad (4.40)$$

avec $\eta = \sqrt{\varepsilon}$.

4.3.1 Décomposition du résidu

Commençons par appliquer le d'Alembertien à l'erreur $\tilde{e}_{\varepsilon,I}$, voir (4.39). Par définition de la troncature de la solution $\tilde{u}_{\varepsilon,I}$, voir (4.12), nous avons

$$\begin{aligned}\square \tilde{e}_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t) &= \square (\tilde{u}_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t) - \tilde{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)) \\ &= \square \left(\chi^\eta(\mathbf{x}) u_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t) + (1 - \chi^\eta) U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \right) - \square \tilde{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

Nous allons ensuite utiliser les commutateurs. Rappelons que le commutateur de deux opérateurs A et B s'écrit

$$< A, B > = AB - BA. \quad (4.41)$$

Nous obtenons en appliquant cette définition

$$\square \tilde{e}_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t) = \chi^\eta(\mathbf{x}) \square u_{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) - \square \tilde{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \quad (4.42)$$

$$+ (1 - \chi^\eta(\mathbf{x})) \square U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \quad (4.43)$$

$$+ < \square, \chi^\eta(\mathbf{x}) > u_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t) + < \square, 1 - \chi^\eta(\mathbf{x}) > U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t). \quad (4.44)$$

Dans la suite, nous allons estimer chacun des termes de cette somme : (4.42), (4.43) et enfin (4.44). Nous avons (4.42) qui est nul car le support de la source f est en champ lointain, il suit

$$\chi^\eta(\mathbf{x}) \square u_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}, t) = f(t) = \square \tilde{u}_{\varepsilon}(\mathbf{x}, t). \quad (4.45)$$

4.3.2 Consistance en champ proche

Dans cette section, nous allons nous intéresser au terme (4.43).

Lemme 4.2. *Nous avons la troncature de la solution en champ proche $U_{\varepsilon,I}$ qui vérifie*

$$\square U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) = -\frac{\partial_t^2}{c^2} (\varepsilon^{I-1} U_{I-1}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) + \varepsilon^I U_I(\mathbf{x}/\varepsilon, t)). \quad (4.46)$$

Preuve. Par définition du d'Alembertien et de $U_{\varepsilon,I}$ nous avons

$$\square U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) = \left(\Delta - \frac{\partial_t^2}{c^2} \right) \left(\sum_{i=0}^I \varepsilon^i U_i(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \right).$$

Sous forme développée, ceci devient

$$\begin{aligned}\square U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) &= \left(\Delta U_0(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_0(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \right) \varepsilon^0 \\ &+ \left(\Delta U_1(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_1(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \right) \varepsilon^1 \\ &+ \dots \\ &+ \left(\Delta U_{I-1}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_{I-1}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \right) \varepsilon^{I-1} \\ &+ \left(\Delta U_I(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_I(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \right) \varepsilon^I.\end{aligned}$$

En réarrangeant les termes nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Box U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) &= \Delta U_0(\mathbf{x}/\varepsilon, t) + \Delta U_1(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \\
&+ (\varepsilon^2 \Delta U_2(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_0(\mathbf{x}/\varepsilon, t)) \varepsilon^0 \\
&+ (\varepsilon^2 \Delta U_3(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_1(\mathbf{x}/\varepsilon, t)) \varepsilon^1 \\
&+ \dots \\
&+ (\varepsilon^2 \Delta U_I(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_{I-2}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)) \varepsilon^{I-2} \\
&- \frac{\partial_t^2}{c^2} U_{I-1}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \varepsilon^{I-1} - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_I(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \varepsilon^I.
\end{aligned}$$

Remarquons alors que $\Delta U_0(\mathbf{x}/\varepsilon, t) = \Delta U_1(\mathbf{x}/\varepsilon, t) = 0$, $\Delta_{\mathbf{X}} U_{i+2}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial_t^2}{c^2} U_{i-2}(\mathbf{X}, t)$ et $\Delta_{\mathbf{X}} = \varepsilon^2 \Delta$, la somme se réduit donc à

$$\Box U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) = -\frac{\partial_t^2}{c^2} U_{I-1}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \varepsilon^{I-1} - \frac{\partial_t^2}{c^2} U_I(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \varepsilon^I.$$

Ceci termine la preuve. \square

Passons à la majoration du terme (4.43). Le lemme 4.2 nous permet d'écrire

$$(1 - \chi^\eta(\mathbf{x})) \Box U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) = (1 - \chi^\eta(\mathbf{x})) \frac{\partial_t^2}{c^2} (-\varepsilon^{I-1} U_{I-1}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \varepsilon^I U_I(\mathbf{x}/\varepsilon, t)). \quad (4.47)$$

La fonction $1 - \chi^\eta$ est à support dans la boule de rayon 2η , notée $B_{2\eta}$, nous avons alors

$$\max_{t \leq T} \|(1 - \chi^\eta(\mathbf{x})) \Box U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} = \max_{t \leq T} \|(1 - \chi^\eta(\mathbf{x})) \frac{\partial_t^2}{c^2} (-\varepsilon^{I-1} U_{I-1}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \varepsilon^I U_I(\mathbf{x}/\varepsilon, t))\|_{L^\infty(B_{2\eta})}. \quad (4.48)$$

Nous avons vu dans le chapitre 3, voir (3.17), que nous pouvions écrire U_i sous la forme

$$U_i(\mathbf{X}, t) = \sum_{p=-P}^i U_{i,p}(\theta, \varphi, t) R^p + \mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t), \quad (4.49)$$

avec $\max_{t \leq T} \partial_t^m |\mathfrak{U}_i^P(\mathbf{X}, t)| = O_{R \rightarrow +\infty}(R^{-P-1})$, pour tout $m \geq 0$. Nous en déduisons

$$\partial_t^m U_i(\mathbf{X}, t) = O_{R \rightarrow +\infty}(R^i), \quad \text{avec } R = \frac{r}{\varepsilon}. \quad (4.50)$$

En particulier, lorsque $r \in B_{2\eta}$ nous avons

$$\frac{\partial_t^2}{c^2} U_{I-1}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) = O_{\varepsilon \rightarrow 0}((\frac{\eta}{\varepsilon})^{I-1}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial_t^2}{c^2} U_I(\mathbf{x}/\varepsilon, t) = O_{\varepsilon \rightarrow 0}((\frac{\eta}{\varepsilon})^I). \quad (4.51)$$

Lorsque ε tend vers 0, nous obtenons

$$\max_{t \leq T} \|(1 - \chi^\eta(\mathbf{x})) \Box U_{\varepsilon,I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I-1}). \quad (4.52)$$

4.3.3 Consistance dans la zone de raccord

Dans cette section, nous nous intéressons au terme (4.44).

Lemme 4.3. Dans la zone intermédiaire, ici la couronne $C_\eta^{2\eta} = \{\eta \leq |\mathbf{x}| \leq 2\eta\}$, nous avons

$$\max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I+1}) \quad (4.53)$$

et

$$\max_{t \leq T} \|\text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I+1}). \quad (4.54)$$

Remarque 4.8. Le lemme 4.3 signifie que la fonction de raccord approche bien à la fois la solution en champ lointain et celle en champ proche dans la zone intermédiaire, $C_\eta^{2\eta}$.

Preuve du lemme 4.3. Il suffit d'appliquer le lemme 3.2 à la couronne $C_\eta^{2\eta}$. \square

Lemme 4.4. Nous avons

$$\max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \nabla \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^I). \quad (4.55)$$

et

$$\max_{t \leq T} \|\nabla_{\mathbf{X}} \text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) - \nabla U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta/\varepsilon}^{2\eta/\varepsilon})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I+2}). \quad (4.56)$$

Preuve du lemme 4.4. Il suffit d'appliquer le lemme 3.3 à la couronne $C_\eta^{2\eta}$. \square

Remarque 4.9. Nous avons pris $\eta = \sqrt{\varepsilon}$ pour deux raisons. La première est que sous cette forme η vérifie bien les limites voulues à savoir

$$\begin{cases} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta = 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta}{\varepsilon} = +\infty. \end{cases} \quad (4.57)$$

La seconde est qu'avec η de cet ordre, l'erreur entre le développement en champ proche et en champ lointain est minimisé, voir le lemme 3.2.

Lemme 4.5. Nous avons les majorations suivantes

$$\max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I+1}), \quad (4.58)$$

et

$$\max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \nabla U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^I). \quad (4.59)$$

Preuve du lemme 4.5. Par inégalité triangulaire nous avons

$$\begin{aligned} \max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} &\leq \max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \\ &\quad + \max_{t \leq T} \|\text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \nabla U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} &\leq \max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \nabla \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \\ &\quad + \max_{t \leq T} \|\nabla \text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \nabla U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})}. \end{aligned}$$

Les lemmes 4.3 et 4.4 nous donnent

$$\begin{cases} \max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I+1}) \\ \max_{t \leq T} \|\text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I+1}) \\ \max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \nabla \text{rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^I) \\ \max_{t \leq T} \|\nabla_{\mathbf{X}} \text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) - \nabla_{\mathbf{X}} U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta/\varepsilon}^{2\eta/\varepsilon})} \leq \frac{O}{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I+2}). \end{cases} \quad (4.60)$$

Nous obtenons immédiatement (4.58). Pour montrer (4.59), il suffit de remarquer que

$$\max_{t \leq T} \|\nabla_{\mathbf{X}} \text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t) - \nabla_{\mathbf{X}} U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t)\|_{L^\infty(C_{\eta/\varepsilon}^{2\eta})} = \varepsilon \max_{t \leq T} \|\nabla \text{Rac}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) - \nabla U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \quad (4.61)$$

et que $\varepsilon = \eta^2$ pour conclure. Ceci termine la preuve. \square

Passons à la majoration du terme (4.44). Commençons par remarquer que

$$\langle \square, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle \tilde{u}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) + \langle \square, 1 - \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) = \langle \Delta, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle (u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)), \quad (4.62)$$

car pour toute fonction v

$$\langle \square, 1 \rangle v = 0 \quad \text{et} \quad \langle \square, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle v = \langle \Delta, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle v. \quad (4.63)$$

En effet, ∂_t^2 et χ^η appartiennent à deux espaces normaux. Par définition du commutateur, voir (4.41), il suit

$$\langle \Delta, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle v = \Delta(\chi^\eta(\mathbf{x})v) - \chi^\eta(\mathbf{x})\Delta v. \quad (4.64)$$

Or nous avons

$$\chi^\eta(\mathbf{x})\Delta v = \Delta(\chi^\eta(\mathbf{x})v) - 2\nabla\chi^\eta(\mathbf{x}) \cdot \nabla v - (\Delta\chi^\eta(\mathbf{x}))v. \quad (4.65)$$

En injectant (4.65) dans (4.64), nous avons

$$|\langle \square, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle v| \leq |(\Delta\chi^\eta(\mathbf{x}))v| + 2|\nabla\chi^\eta(\mathbf{x}) \cdot \nabla v|. \quad (4.66)$$

Remarque 4.10. Les fonctions $\Delta\chi^\eta$ et $\nabla\chi^\eta$ sont à support dans la couronne $C_\eta^{2\eta}$, $\Delta\chi^\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta^2}\Delta\chi(\mathbf{x}/\eta)$ et $\nabla\chi^\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta}\nabla\chi(\mathbf{x}/\eta)$ nous avons

$$\begin{cases} \max_{t \leq T} \|\Delta\chi^\eta(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\|_{L^\infty(B_{2\eta})} \leq \frac{\text{Cte}}{\eta^2} \max_{t \leq T} \|v(\mathbf{x})\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \\ \max_{t \leq T} \|\nabla\chi^\eta(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\|_{L^\infty(B_{2\eta})} \leq \frac{\text{Cte}}{\eta} \max_{t \leq T} \|v(\mathbf{x})\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})}. \end{cases} \quad (4.67)$$

En remplaçant v par $u_{\varepsilon, I} - U_{\varepsilon, I}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \max_{t \leq T} \|\langle \square, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle (u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t))\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} &\leq \frac{\text{Cte}}{\eta^2} \max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \\ &+ \frac{\text{Cte}}{\eta} \max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \nabla U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})}, \end{aligned}$$

avec, d'après le lemme 4.5

$$\begin{cases} \max_{t \leq T} \|u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I+1}), \\ \max_{t \leq T} \|\nabla u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - \nabla U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(C_\eta^{2\eta})} \leq O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^I). \end{cases} \quad (4.68)$$

Nous obtenons finalement

$$\max_{t \leq T} \|\langle \square, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle (u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t))\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\eta^{I-1}). \quad (4.69)$$

4.3.4 Preuve du théorème de consistance 4.5

Les lemmes 4.2, 4.3 et 4.4 vont nous permettre de faire la preuve du théorème de consistance 4.5.

Preuve du théorème 4.5. Nous avons

$$\square \tilde{e}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) = \chi^\eta(\mathbf{x}) \square u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \square \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \quad (4.70)$$

$$+ (1 - \chi^\eta(\mathbf{x})) \square U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t) \quad (4.71)$$

$$+ \langle \square, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) + \langle \square, 1 - \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t). \quad (4.72)$$

avec

$$\begin{cases} \chi^\eta(\mathbf{x}) \square u_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \square \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \max_{t \leq T} \|(1 - \chi^\eta(\mathbf{x})) \square U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq O(\eta^{I-1}), \\ \max_{t \leq T} \|\langle \square, \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t) + \langle \square, 1 - \chi^\eta(\mathbf{x}) \rangle U_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}/\varepsilon, t)\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq O(\eta^{I-1}). \end{cases} \quad (4.73)$$

Par inégalité triangulaire nous déduisons

$$\max_{t \leq T} \|\square \tilde{e}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq O(\eta^{I-1}). \quad (4.74)$$

Ceci termine la preuve. \square

4.4 Preuve des théorèmes d'estimation d'erreur

Nous avons maintenant le matériel nécessaire pour pouvoir démontrer les trois théorèmes énoncés en début de chapitre, à savoir les théorèmes 4.1, 4.2 et 4.3. Commençons par le théorème 4.3.

Preuve du théorème 4.3. Le théorème de stabilité 4.4 fournit l'estimation

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{e}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq C(T) \max_{t \leq T} \|\square \tilde{e}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})}. \quad (4.75)$$

Le théorème 4.5 permet d'estimer la forme du D'Alembertien

$$\max_{t \leq T} \|\square \tilde{e}_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon, R_\diamond})} \leq O(\eta^{I-1}), \quad (4.76)$$

avec $\eta = \sqrt{\varepsilon}$. Ceci termine la preuve. \square

Passons à la démonstration du théorème 4.1.

Preuve du théorème 4.1. Commençons par une inégalité triangulaire

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(B_{r^*}^c)} \leq \max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - u_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(B_{r^*}^c)} + \max_{t \leq T} \left\| \sum_{i=I+1}^{I+I_0} \varepsilon^i u_i(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^2(B_{r^*}^c)}, \quad (4.77)$$

avec $I_0 > 0$. Pour tout $r^* > 0$, sur $B_{r^*}^c$, nous sommes en champ lointain car il existe un voisinage de l'origine qui n'intersecte pas $B_{r^*}^c$. Par conséquent la solution exacte \tilde{u}_ε coïncide avec la solution en champ lointain u_ε . Nous avons

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - u_{\varepsilon, I}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(B_{r^*}^c)} \leq \max_{t \leq T} \|\tilde{e}_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(B_{r^*}^c)} + O(\varepsilon^{I+1}). \quad (4.78)$$

Le théorème 4.3 permet d'obtenir

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{e}_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(B_{r_*}^\varepsilon)} \leq \max_{t \leq T} \|\tilde{e}_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{\frac{I+I_0}{2}-\frac{1}{2}}). \quad (4.79)$$

Nous choisissons alors un I_0 tel que $\frac{I+I_0}{2} - \frac{1}{2} \geq I+1$, par exemple prenons $I_0 = I+3$, il suit

$$O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{\frac{I+I_0}{2}-\frac{1}{2}}) = O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{I+1}). \quad (4.80)$$

Nous obtenons ainsi le résultat attendu. \square

Enfin démontrons le théorème 4.2.

Preuve du théorème 4.2. La preuve est similaire à celle du théorème 4.1, l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} \max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{X}\varepsilon, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t)\|_{L^2(\widehat{B}_{R^*} \setminus \widehat{B})} &\leq \max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{X}\varepsilon, t) - U_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{X}, t)\|_{L^2(\widehat{B}_{R^*} \setminus \widehat{B})} \\ &\quad + \max_{t \leq T} \left\| \sum_{i=I+1}^{I+I_0} \varepsilon^i U_i(\mathbf{X}, t) \right\|_{L^2(\widehat{B}_{R^*} \setminus \widehat{B})}, \end{aligned}$$

avec $I_0 > 0$. Ici nous sommes en champ proche, \tilde{u}_ε correspond à la solution en champ proche U_ε , avec le changement de variables nous avons

$$U_\varepsilon(\mathbf{X}, t) = \tilde{u}_\varepsilon(\varepsilon \mathbf{X}, t). \quad (4.81)$$

Nous obtenons

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{X}\varepsilon, t) - U_{\varepsilon, I}(\mathbf{X}, t)\|_{L^2(\widehat{B}_{R^*} \setminus \widehat{B})} \leq \max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{X}\varepsilon, t) - \tilde{u}_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{X}\varepsilon, t)\|_{L^2(\widehat{B}_{R^*} \setminus \widehat{B})} + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{I+1}). \quad (4.82)$$

Le changement d'échelle donne

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{X}\varepsilon, t) - \tilde{u}_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{X}\varepsilon, t)\|_{L^2(\widehat{B}_{R^*} \setminus \widehat{B})} = \max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \tilde{u}_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(B_{\varepsilon R^*} \setminus \omega_\varepsilon)}. \quad (4.83)$$

En remarquant que $B_{\varepsilon R^*} \setminus \omega_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$ et avec le théorème 4.3 nous obtenons

$$\max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{X}\varepsilon, t) - \tilde{u}_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{X}\varepsilon, t)\|_{L^2(\widehat{B}_{R^*} \setminus \widehat{B})} \leq \max_{t \leq T} \|\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \tilde{u}_{\varepsilon, I+I_0}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{\frac{I+I_0}{2}-\frac{1}{2}}). \quad (4.84)$$

Nous choisissons alors un I_0 tel que $\frac{I+I_0}{2} - \frac{1}{2} \geq I+1$, par exemple prenons $I_0 = I+3$, il suit

$$O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{\frac{I+I_0}{2}-\frac{1}{2}}) = O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^{I+1}). \quad (4.85)$$

Nous obtenons ainsi le résultat attendu. \square

Conclusion de la partie I

Ce chapitre termine la partie théorique. Cette conclusion est l'occasion de revenir sur les nouveautés que nous avons apportées par rapport au régime fréquentiel. Nous pouvons par exemple se référer à [41], [12] pour un travail où l'ensemble de la démarche est présente.

Les calculs formels menant aux développements asymptotiques (l'identification des systèmes d'équations aux dérivées partielles et les écritures des principes de raccord, voir l'introduction), bien que plus complexes, sont très similaires aux calculs en régime fréquentiel. Toutefois la dérivation et la justification des singularités de champ proche et de champ lointain sont à notre avis

plus compliqués. C'est la raison pour laquelle les chapitres 1 et 2 représentent la majeure partie de cette thèse.

L'estimation d'erreur globale est basée, comme souvent en analyse asymptotique, sur un argument de stabilité et consistance. L'argument de stabilité est spécifique au temporel et est lié au fait que l'équation des ondes conserve l'énergie totale. L'argument de consistance est une adaptation des preuves en régime fréquentiel. L'estimation des erreurs de raccord dans une norme adaptée est la partie la plus technique. Les estimations d'erreur locale reprennent un argument de rattrapage d'ordre qui peut être considéré comme classique en analyse asymptotique.

Deuxième partie

Outils numériques pour l'analyse asymptotique

Introduction et repère bibliographique de la deuxième partie

Dans cette partie, nous allons détailler les simulations numériques qui illustrent les résultats théoriques obtenus dans la partie I. Nous développons également dans cette partie des outils numériques pour le traitement des problèmes de perturbation singulière et de propagation d'ondes en domaine temporel.

Ces simulations ont été réalisées à l'aide de la librairie du projet *Magique-3D*, dont le développeur principal est Julien Diaz. Ce code de calcul est programmé en *Fortran 90* et son noyau numérique est un code de Galerkin Discontinue (voir [1], [4], [6] et [25]) sur des maillages tétraédriques. Ce choix est particulièrement adapté en général aux géométries complexes et en particulier à notre problème de petit obstacle. Toutefois, ces simulations ont nécessité de nombreuses modifications que j'ai réalisées, notamment au niveau de l'automatisation des maillages, des algorithmes de raffinement local espace-temps et de l'implémentation des méthodes asymptotiques proposées dans cette thèse.

La principale difficulté numérique se situe au niveau des grands ratios de longueur caractéristiques. Afin de répondre à cette problématique, nous avons proposé trois différentes approches :

- la première approche est la résolution directe à l'aide de la méthode Galerkin Discontinue (DG). Nous détaillerons cette expérience dans le chapitre 5 principalement dans le but de présenter la méthode de Galerkin Discontinue, de montrer notre point de départ et de construire une solution de référence ;
- la seconde approche est la méthode issue des développements asymptotiques raccordés que nous avons présentée de façon théorique dans la partie I, nous décrirons son implémentation numérique dans le chapitre 6 ;
- la troisième approche est la méthode des pas de temps locaux ou méthode de raffinement espace-temps. Nous introduirons cette méthode dans le chapitre 7.

Chapitre 5

Résolution directe à l'aide de la méthode de Galerkin Discontinue

Ce chapitre se divise en deux parties. Dans un premier temps, nous allons expliciter l'expérience numérique et pourquoi nous avons choisi de travailler avec la méthode de Galerkin Discontinue (DG) en section 5.1. Ensuite, dans la section 5.2, nous mettrons en œuvre la méthode DG pour notre problème considéré.

5.1 Contexte d'étude pour la résolution directe

Nous travaillons sur la boule de rayon r^* , notée B_{r^*}

$$B_{r^*} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq r^*\}. \quad (5.1)$$

Dans la simulation numérique, nous prenons $r^* = 1$. Ce domaine comporte un petit obstacle sphérique B_ε de rayon ε

$$B_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq \varepsilon\}. \quad (5.2)$$

Enfin, nous notons $\Omega_\varepsilon = B_{r^*} \setminus B_\varepsilon$ le domaine de propagation constitué de B_{r^*} privé de B_ε . Nous avons représenté le domaine sur la figure 5.1. Afin de modéliser l'obstacle, nous allons mettre des

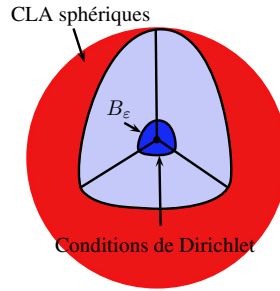


FIGURE 5.1 – Domaine considéré pour la résolution directe

conditions de Dirichlet sur la frontière de l'obstacle, c'est à dire sur la sphère de rayon ε , notée $\Gamma_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = \varepsilon\}$

$$\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon \times [0, T], \quad (5.3)$$

avec $[0, T]$ un intervalle de temps fini, T étant la fin de l'expérience numérique.

Remarque 5.1. Lorsque nous implémentons, nous sommes forcés de travailler sur un intervalle de temps fini.

Afin de considérer l'extérieur de B_{r^*} , nous allons mettre des conditions aux limites absorbantes (CLA) sphériques sur la sphère de rayon r^* , notée $\Gamma_{r^*} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = r^*\}$.

Remarque 5.2. Les conditions aux limites absorbantes d'Engquist et Majda, voir [20] et [21] (d'ordre supérieur ou égal à 2) ne sont pas adaptées aux frontières courbes. Lorsqu'elles sont d'ordre élevés, elles peuvent être instables lorsque le domaine comporte des coins.

Une idée naturelle consiste à poser cette condition aux limites sur une sphère de rayon r^* . C'est cette approche qu'ont développé Bayliss, Gunzburger et Turkel, voir [5] et [7].

En dimension 3, les conditions de Bayliss et Turkel d'ordre 2 pour une sphère de rayon r^* s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial_t}{c} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \partial_r \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \frac{\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{r^*} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{r^*} \times [0, T], \quad (5.4)$$

avec c la vitesse de propagation de l'onde et Γ_{r^*} la sphère de rayon r^* . Rappelons à présent l'équation des ondes acoustique

$$c^2 \Delta \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad \text{sur } \Omega_\varepsilon \times [0, T]. \quad (5.5)$$

La vitesse de propagation c est continue dans chaque maille. Dans l'expérience, la source f est le produit d'un Dirac (en espace) et d'une Gaussienne centrée en μ et de longueur caractéristique σ (en temps)

$$f(\mathbf{x}, t) = \delta_{\mathbf{x}-\mathbf{x}_s} \otimes f_g(t), \quad (5.6)$$

avec \mathbf{x}_s les coordonnées de la source et

$$f_g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5.7)$$

Nous choisissons \mathbf{x}_s de telle sorte que

$$\mathbf{0} \notin \text{supp}(f(\cdot, t)). \quad (5.8)$$

Rappelons que nous notons \tilde{u}_ε la solution du problème sur Ω_ε . Enfin nous prenons des conditions initiales nulles

$$\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{sur } \Omega_\varepsilon. \quad (5.9)$$

Pour résumer, nous avons alors le problème suivant :

$$\begin{cases} c^2 \Delta \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), & \text{sur } \Omega_\varepsilon \times [0, T], \\ \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{sur } \Omega_\varepsilon, \\ \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = 0, & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \times [0, T], \\ \frac{\partial_t}{c} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \partial_r \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \frac{\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{r^*} = 0, & \text{sur } \Gamma_{r^*} \times [0, T]. \end{cases} \quad (5.10)$$

Ce problème admet une solution unique $\tilde{u}_\varepsilon \in C^\infty((\Omega_\varepsilon \setminus \{\mathbf{x}_s\}) \times [0, T])$.

Remarque 5.3. Nous avons considéré une source ponctuelle singulière bien qu'elle ne soit pas $C^\infty(\Omega_\varepsilon \times [0, T])$. En effet, c'est une configuration très fréquente dans la pratique et elle est de ce point de vue plus intéressante qu'une source régulière. Les simulations numériques réalisées au sein de l'équipe Magique-3D n'ont pas révélé de problème numérique. Toutefois, ceci ne repose pas actuellement sur une théorie rigoureuse.

5.1.1 Pourquoi appliquer une approximation de Galerkin Discontinue ?

La méthode de Galerkin¹ Discontinue (DG) a été initialement introduite par Reed and Hill en 1973, voir [34], comme technique de résolution des problèmes hyperboliques de transport des neutrons. Cette technique, devenant de plus en plus populaire, permet désormais de résoudre la plupart des équations aux dérivées partielles.

La méthode de Galerkin Discontinue (DG) est souvent assimilée à une méthode hybride ou mixte, car elle combine à la fois les caractéristiques de la méthode des éléments finis (FEM) et des volumes finis (FVM). En effet, la solution est représentée dans chaque élément comme étant une approximation polynomiale (comme dans les FEM) et les interactions au niveau des interfaces (arêtes communes en 2D, faces communes en 3D), sont calculées à l'aide de flux numériques (comme dans FVM). Théoriquement, les solutions peuvent être obtenues avec un ordre arbitrairement élevé.

De plus, la méthode DG permet la formation de schémas numériques compacts. Ceci est dû au fait que la représentation de la solution dans chaque élément est indépendante de la solution des autres cellules (aspect local). Ceci améliore grandement la robustesse et la précision de n'importe quelle implémentation de conditions de bord mais permet aussi la parallélisation du code de calcul.

En plus de ces caractéristiques, la méthode DG est extrêmement flexible :

- elle peut manipuler une grande variété d'éléments et de maillages,
- elle permet l'utilisation de techniques adaptatives de type *hp* (éléments de taille variable (h) et de degrés différents (p)).

5.2 Mise en œuvre de la méthode de Galerkin Discontinue

5.2.1 Notations

Nous considérons des maillages composés de tétraèdres. Nous notons NT_h le nombre d'éléments du maillage et \mathcal{T}_h le maillage associé au domaine Ω_ε . Enfin, nous notons V_h l'espace d'approximation

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega_\varepsilon), v|_K \in \mathcal{P}_p(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (5.11)$$

où $\mathcal{P}_p(K)$ est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à p . Nous notons :

- \mathcal{F}_i l'ensemble des faces internes, c'est-à-dire les faces appartenant à deux éléments du maillage (que nous noterons arbitrairement K^+ et K^-), voir la figure 5.2,
- \mathcal{F}_b l'ensemble des faces frontières, c'est-à-dire les faces appartenant à un seul élément du maillage,
- n^\pm les vecteurs normaux à K^\pm , orientés vers l'extérieur de K^\pm ,
- φ^\pm les traces d'une fonction φ sur K^\pm .

Remarque 5.4. *Nous avons fait la figure 5.2 en 2D pour avoir une idée mais nous sommes en 3D, donc les faces sont des triangles et les éléments du maillage sont des tétraèdres.*

5.2.2 Discrétisation en espace

Construisons le problème approché à partir du problème que nous avons détaillé en (5.10). Multiplions l'équation des ondes par une fonction continue par maille v et intégrons sur K un élément du maillage. Nous supposons ici que la solution est régulière afin de pouvoir effectuer des intégrations par partie et pouvoir définir ces traces de Dirichlet et de Neumann (pour les traces

1. En Français, les noms russes qui finissent en *-in* s'écrivent *-ine* pour respecter la phonétique. Galerkin est la version française de ГАЛЕРКИН.

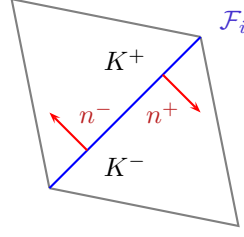


FIGURE 5.2 – Schéma de deux éléments du maillage

\tilde{u}_ε doit être au minimum C^1 en espace). Nous obtenons

$$\int_K c^2 \Delta \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} - \int_K \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = \int_K f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (5.12)$$

Dans la suite, nous omettrons $d\mathbf{x}$ pour alléger les expressions. Avec la formule de Green, nous pouvons modifier le premier terme de la façon suivante

$$\int_K c^2 \Delta \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t) = - \int_K c^2 \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \nabla v(\mathbf{x}, t) + \int_{\Gamma_K} c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, t) \quad (5.13)$$

où Γ_K est la frontière de l'élément K . Nous sommes ensuite sur tous les éléments du maillage et nous obtenons

$$\begin{aligned} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K c^2 \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \nabla v(\mathbf{x}, t) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t) &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\Gamma_K} c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, t) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t), \end{aligned}$$

avec $\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\Gamma_K} c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, t) = \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, t) + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 [(\nabla \tilde{u}_\varepsilon^+(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^+) v^+(\mathbf{x}, t) + (\nabla \tilde{u}_\varepsilon^-(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^-) v^-(\mathbf{x}, t)]$. Il suit

$$\begin{aligned} - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K c^2 \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \nabla v(\mathbf{x}, t) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t) &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, t) \\ + \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 [(\nabla \tilde{u}_\varepsilon^+(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^+) v^+(\mathbf{x}, t) &+ (\nabla \tilde{u}_\varepsilon^-(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^-) v^-(\mathbf{x}, t)] = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nous allons détailler au fur et à mesure les termes de (5.14).

La somme sur les faces internes

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 [(\nabla \tilde{u}_\varepsilon^+(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^+) v^+(\mathbf{x}, t) + (\nabla \tilde{u}_\varepsilon^-(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}^-) v^-(\mathbf{x}, t)]. \quad (5.15)$$

Définissons le saut et la moyenne d'une fonction et d'un vecteur.

Définition 5.1 (Définition du saut et de la moyenne). *Pour $F \in \mathcal{F}_i$, nous notons $[[\varphi]]$ le saut de la fonction φ à travers la face F et $\{\{\varphi\}\}$ la moyenne de φ sur la face F*

$$\begin{aligned} [[\varphi]] &:= \varphi^+ n^+ + \varphi^- n^-, \\ \{\{\varphi\}\} &:= \frac{1}{2} (\varphi^+ + \varphi^-). \end{aligned}$$

Pour $F \in \mathcal{F}_b$, nous notons $[[\varphi]] := \varphi n$ et $\{\{\varphi\}\} := \varphi$.

De la même façon, pour $F \in \mathcal{F}_i$, nous notons $[[q]]$ le saut d'un vecteur q à travers la face F et $\{\{q\}\}$ la moyenne de q sur la face F

$$\begin{aligned} [[q]] &:= q^+ \cdot n^+ + q^- \cdot n^-, \\ \{\{q\}\} &:= \frac{1}{2} (q^+ + q^-). \end{aligned}$$

Pour $F \in \mathcal{F}_b$, nous notons $[[q]] := q \cdot n$ et $\{\{q\}\} := q$.

Remarque 5.5. *La moyenne d'un scalaire, respectivement d'un vecteur, est un scalaire, respectivement un vecteur. Par contre, le saut d'un scalaire, respectivement d'un vecteur, est un vecteur, respectivement un scalaire. Remarquons que cette définition reste valable en intervertissant K^+ et K^- .*

Nous allons également utiliser les propriétés suivantes

Propriété 5.1. *Soient φ et ψ deux fonctions continues par maille, nous avons à travers la face $F \in \mathcal{F}_i$ la relation suivante*

$$[[\varphi\psi]] = [[\varphi]] \{\{\psi\}\} + [[\psi]] \{\{\varphi\}\}. \quad (5.16)$$

Preuve. D'après la définition 5.1 nous avons pour $F \in \mathcal{F}_i$

$$[[\varphi]] \{\{\psi\}\} + [[\psi]] \{\{\varphi\}\} = \frac{1}{2} (\varphi^+ n^+ + \varphi^- n^-) (\psi^+ + \psi^-) + \frac{1}{2} (\psi^+ n^+ + \psi^- n^-) (\varphi^+ + \varphi^-). \quad (5.17)$$

Comme $n^+ = -n^-$, il suit

$$[[\varphi]] \{\{\psi\}\} + [[\psi]] \{\{\varphi\}\} = (\varphi^+ \psi^+ - \varphi^- \psi^-) n^+ = [[\varphi\psi]]. \quad (5.18)$$

□

Propriété 5.2. *Soit φ une fonction scalaire continue par maille et q une fonction vectorielle. Nous avons à travers la face $F \in \mathcal{F}_i$ la relation suivante*

$$[[q\varphi]] = [[q]] \{\{\varphi\}\} + [[\varphi]] \cdot \{\{q\}\}. \quad (5.19)$$

Preuve. La preuve est semblable à celle de la propriété 5.1. □

Appliquons la définition 5.1 du saut à l'équation (5.15), nous obtenons

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 [(\nabla \tilde{u}_\varepsilon^+(\mathbf{x}, t) \cdot n^+) v^+(\mathbf{x}, t) + (\nabla \tilde{u}_\varepsilon^-(\mathbf{x}, t) \cdot n^-) v^-(\mathbf{x}, t)] = \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 [[\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t)]].$$

La propriété 5.2 nous donne

$$[[\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t)]] = [[\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \{\{v(\mathbf{x}, t)\}\} + [[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}\}. \quad (5.20)$$

Nous voulons faire apparaître une symétrie, pour cela nous allons utiliser des propriétés de l'équation des ondes.

Propriété 5.3. *Si \tilde{u}_ε est solution de l'équation des ondes alors*

1. $[[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] = 0,$
2. $[[\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] = 0.$

En effet, nous savons que l'onde \tilde{u}_ε est continue dans Ω_ε et $\nabla \tilde{u}_\varepsilon$ est continue à travers les interfaces, afin d'assurer la transmission du flux entre les deux mailles. Nous allons utiliser ces propriétés pour la formulation variationnelle. La propriété 5.3 et l'équation (5.20) donnent

$$[[\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}, t)]] = [[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}\}. \quad (5.21)$$

Nous ajoutons ensuite un terme nul pour obtenir une symétrie

$$[[\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)v(\mathbf{x}, t)]] = [[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}\} + [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla v(\mathbf{x}, t)\}\}. \quad (5.22)$$

Enfin, nous rajoutons un terme positif pour la coercivité

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 \gamma [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] = 0, \quad (5.23)$$

où γ est un terme qui pénalise les sauts de \tilde{u}_ε et v sur les faces de \mathcal{T}_h . Il est défini sur chaque face du maillage par : $\gamma := \frac{\alpha}{h}$, où h désigne le pas de discrétisation (c'est-à-dire le diamètre du plus petit cercle inscrit de $K \in \mathcal{T}_h$) et α dépend de l'ordre de discrétisation (\mathcal{P}_p). Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 [[(\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t).n)v(\mathbf{x}, t)]] &= \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 ([[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}\} + [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla v(\mathbf{x}, t)\}\}) \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 \gamma [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] . \end{aligned} \quad (5.24)$$

La somme sur les termes de bord

Nous allons maintenant nous intéresser au terme de bord. La frontière du domaine Ω_ε est composée de deux sphères centrées en l'origine Γ_ε et Γ_{r^*} sur lesquelles nous avons soit des conditions de Dirichlet, soit des conditions aux limites absorbantes sphériques. Il suit

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t).n)v(\mathbf{x}, t) = \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t).n)v(\mathbf{x}, t) + \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t).n)v(\mathbf{x}, t). \quad (5.25)$$

La somme sur les faces avec des CLA sphériques

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t).n)v(\mathbf{x}, t). \quad (5.26)$$

Rappelons que nous considérons la condition absorbante suivante

$$\frac{\partial_t}{c} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \partial_r \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \frac{\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{r^*} = 0, \quad (5.27)$$

voir le problème considéré (5.10).

Remarque 5.6. *Puisque nous sommes sur une sphère, nous avons*

$$\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot n = \partial_r \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t). \quad (5.28)$$

Les égalités (5.27) et (5.28) donnent

$$\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = -\frac{\partial_t}{c} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \frac{\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{r^\star}. \quad (5.29)$$

Il suit

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^\star}} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, t) = - \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^\star}} \int_F c^2 \left[\frac{\partial_t}{c} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \frac{\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{r^\star} \right] v(\mathbf{x}, t). \quad (5.30)$$

La somme sur les faces avec des conditions de Dirichlet

Rappelons le terme de (5.14) faisant intervenir les conditions de Dirichlet

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, t). \quad (5.31)$$

En adoptant le même raisonnement qu'avec la somme sur les faces internes, nous obtenons

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, t) = \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 \{ \{ \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \} \} \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] . \quad (5.32)$$

Nous devons ensuite symétriser en ajoutant un terme nul

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 \{ \{ \nabla v(\mathbf{x}, t) \} \} \cdot [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] = 0, \quad (5.33)$$

et le terme de coercivité

$$\sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 \gamma [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] = 0. \quad (5.34)$$

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 (\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n}) v(\mathbf{x}, t) &= \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 \left([[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{ \{ \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \} \} + \{ \{ \nabla v(\mathbf{x}, t) \} \} \cdot [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \right) \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 \gamma [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] . \end{aligned} \quad (5.35)$$

En injectant (5.24), (5.30) et (5.35) dans l'équation bilan (5.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} &- \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K c^2 \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla v(\mathbf{x}, t) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t) - \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^\star}} \int_F c^2 \left[\frac{\partial_t}{c} \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \frac{\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{r^\star} \right] v(\mathbf{x}, t) \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F c^2 \left([[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{ \{ \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \} \} + \{ \{ \nabla v(\mathbf{x}, t) \} \} \cdot [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] + \gamma [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] \right) \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F c^2 \left([[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{ \{ \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \} \} + [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{ \{ \nabla v(\mathbf{x}, t) \} \} + \gamma [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] \right) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K f(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Nous avons construit le problème semi-discrétisé de (5.10). Nous cherchons $\tilde{u}_\varepsilon : [0, T] \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall v \in V_h$ et $\forall t \in [0, T]$

$$\begin{cases} -\partial_t^2 (\tilde{u}_\varepsilon, v) - c \partial_t b_h (\tilde{u}_\varepsilon, v) - c^2 a_h (\tilde{u}_\varepsilon, v) = (f, v), \\ \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0, \end{cases} \quad (5.37)$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire sur L^2

$$(\tilde{u}_\varepsilon, v) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t). \quad (5.38)$$

Sur $V_h \times V_h$, b_h désigne la forme bilinéaire telle que

$$b_h(\tilde{u}_\varepsilon, v) := \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} \int_F \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) v(\mathbf{x}, t). \quad (5.39)$$

Enfin a_h désigne la forme bilinéaire symétrique sur $V_h \times V_h$ telle que

$$\begin{aligned} a_h(\tilde{u}_\varepsilon, v) &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) \nabla v(\mathbf{x}, t) + \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} \int_F \frac{\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{r^*} v(\mathbf{x}, t) \\ &- \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F \left([[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}\} + \{\{\nabla v(\mathbf{x}, t)\}\} \cdot [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] + \gamma [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] \right) \\ &- \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left([[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)\}\} + [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla v(\mathbf{x}, t)\}\} + \gamma [[\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)]] \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] \right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Nous obtenons alors le système linéaire suivant

$$\mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} U_h + c \mathcal{B} \frac{d}{dt} U_h + c^2 \mathcal{K} U_h = -\mathcal{F}, \quad (5.41)$$

où U_h est le vecteur de composantes $u_{h,i}$, \mathcal{M} est la matrice de masse (**diagonale par bloc**), \mathcal{B} est la matrice absorbante (**ulle partout sauf pour des éléments absorbants**), \mathcal{K} est la matrice de rigidité (**symétrique**) et \mathcal{F} est le vecteur source.

5.2.3 Préliminaires à la construction des matrices \mathcal{M} , \mathcal{K} et \mathcal{B}

Définitions et notations

Pour le maillage, en 3D, nous ne considérerons que des tétraèdres.

Définition 5.2 (Tétraèdre et face de référence). *En 3D, nous appelons élément de référence \hat{K} le tétraèdre de sommets $\hat{S}_1(0, 0, 0)$, $\hat{S}_2(1, 0, 0)$, $\hat{S}_3(0, 1, 0)$, $\hat{S}_4(0, 0, 1)$ et la face de référence, notée \hat{F} , le triangle $\hat{S}_1\hat{S}_2\hat{S}_3$, voir la figure 5.3.*

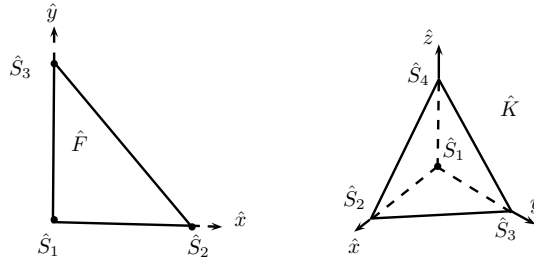


FIGURE 5.3 – La face et le tétraèdre de référence

Remarque 5.7. *En 1D, l'élément de référence est le segment $[0, 1]$ et en 2D c'est le triangle de sommets $\hat{S}_1(0, 0)$, $\hat{S}_2(1, 0)$, $\hat{S}_3(0, 1)$.*

Définition 5.3. Il existe, pour tout élément K , une fonction affine F_K qui transforme un point $\hat{\mathbf{x}}$ de \hat{K} de coordonnées $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ en un point de l'élément K

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}, \quad (5.42)$$

où (x_i, y_i, z_i) sont les coordonnées du sommet S_i de l'élément K , voir la figure 5.4. Cette application peut s'écrire sous la forme matricielle

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = A_K \hat{\mathbf{x}} + b_K,$$

avec son jacobien qui vérifie

$$J_{F_K} = A_K \quad \text{et} \quad |J_{F_K}| = |\det(A_K)|. \quad (5.43)$$

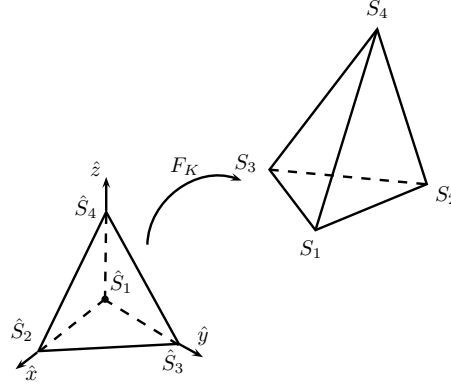


FIGURE 5.4 – La fonction affine F_K

Remarque 5.8. A titre d'exemple, nous pouvons vérifier que les coordonnées des sommets S_i vérifient

$$(x_i, y_i, z_i) = F_K(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i), \quad (5.44)$$

avec $(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i)$ les coordonnées des sommets \hat{S}_i du tétraèdre de référence \hat{K} .

Remarque 5.9. Illustrons également F_K dans le cas 1D et 2D avec la figure 5.5.

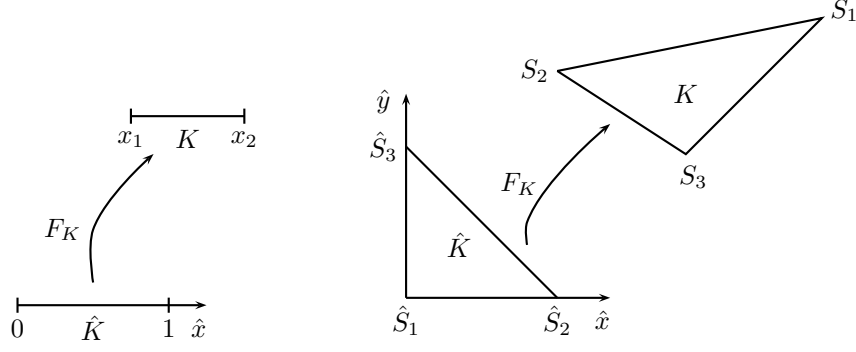
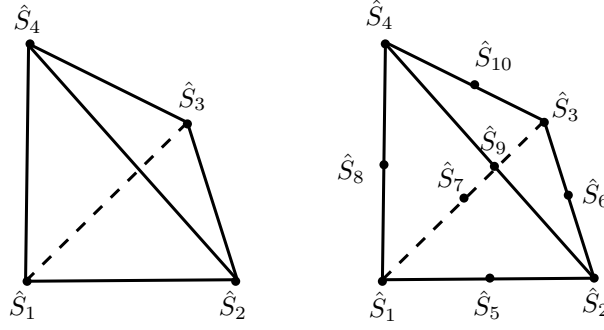
En ce qui concerne les degrés de liberté du maillage pour des éléments finis de type P_p , nous définissons les degrés de liberté sur l'élément de référence.

Définition 5.4. En dimension 3, les degrés de liberté de l'élément fini de Lagrange \hat{P}_p sont les points de coordonnées

$$(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_\ell) = \left(\frac{i-1}{p}, \frac{j-1}{p}, \frac{\ell-1}{p} \right), \quad \hat{x}_i + \hat{y}_j + \hat{z}_\ell \leq 1, \quad i, j, \ell = 1, \dots, p+1, \quad (5.45)$$

voir figure 5.6. Pour un élément K , ses degrés de liberté sont les images par F_K des degrés de liberté de \hat{K} , nous avons

$$P_p^K = F_K(\hat{P}_p). \quad (5.46)$$

FIGURE 5.5 – La fonction affine F_K en 1D et en 2DFIGURE 5.6 – Degrés de liberté du tétraèdre de référence (P_1 à droite et P_2 à gauche)

Construction de l'espace d'approximation V_h

Nous allons construire une base de l'espace V_h , constituée de fonctions continues sur Ω_ε .

Définition 5.5. Soit V_h un sous-espace vectoriel de $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Nous utilisons des éléments finis de type \mathcal{P}^p et nous considérons des fonctions polynomiales de degrés $\leq p$ pour chaque élément afin de définir V_h

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega_\varepsilon), v|_K \in \mathcal{P}^p(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \quad (5.47)$$

Les fonctions de Lagrange $(\Phi_i^K)_{i=1, N_p}$ de l'élément $K \in \mathcal{T}_h$ vérifient

$$\begin{cases} \Phi_i^K(P_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1 \dots N_p, \\ \Phi_i^K|_{K'} = 0, \quad \forall K \neq K', \end{cases} \quad (5.48)$$

où N_p est le nombre de degrés de liberté d'un élément K et P_j sont les coordonnées des degrés de liberté de K . L'espace V_h est de dimension NP_h (NP_h est le nombre de degrés de liberté associés au maillage \mathcal{T}_h) et toute fonction v de V_h vérifie

$$v|_K(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} v(P_i) \Phi_i^K(\mathbf{x}). \quad (5.49)$$

Remarque 5.10. Les valeurs ponctuelles de v dans cette base coïncident avec ses degrés de liberté.

Remarque 5.11. Le support de la fonction Φ_i est uniquement constitué des éléments contenant le point P_i , voir la figure 5.7. Autrement dit, **les seules fonctions de base non nulles sur un élément K sont les fonctions associées aux degrés de liberté de l'élément K .** Cette propriété nous permet de définir les fonctions de base élément par élément à partir de fonctions de base $\hat{\Phi}_i$ définies sur l'élément de référence \hat{K} .

Définition 5.6. Les fonctions de base $\hat{\Phi}_i$ sont définies par :

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_i(\hat{P}_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1 \dots N_p, \\ \hat{\Phi}_i|_K \in \mathcal{P}_p(K), \quad \forall i = 1 \dots N_p, \end{cases} \quad (5.50)$$

où N_p est le nombre de degrés de liberté de \hat{K} .

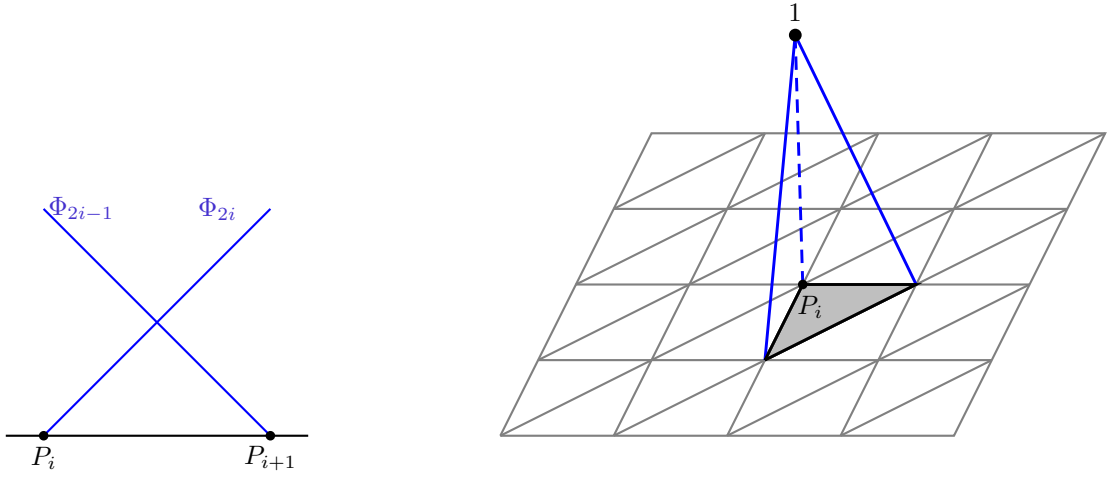


FIGURE 5.7 – La fonction Φ_i et son support en 1D et 2D

Les fonctions de base Φ_i^K sont alors également définies à l'aide des fonctions F_K par

$$\begin{cases} \Phi_i^K = \hat{\Phi}_i \circ F_K^{-1}, \quad \forall i = 1 \dots N_p, \\ \Phi_i^K|_{K'} = 0 \text{ si } K \neq K'. \end{cases} \quad (5.51)$$

Les fonctions de base \mathcal{P}_1 en 3D Explicitons les fonctions de base \mathcal{P}_1 . En \mathcal{P}_1 , nous avons $N_p = 4$, voir la définition 5.4 et la figure 5.6. Nous déduisons de la définition 5.6 que nous avons 4 fonctions de base en \mathcal{P}_1 données par

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}, \\ \hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x}, \\ \hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{y}, \\ \hat{\Phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{z}. \end{aligned}$$

Les fonctions de base \mathcal{P}_2 en 3D Explicitons les fonctions de base \mathcal{P}_2 . En \mathcal{P}_2 , nous avons $N_p = 10$, voir la définition 5.4 et la figure 5.6. Nous déduisons de la définition 5.6 que nous avons

10 fonctions de base en \mathcal{P}_2 données par

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\left(\frac{1}{2} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}\right), & \hat{\Phi}_6(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{x}\hat{y}, \\ \hat{\Phi}_2(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\hat{x}\left(\hat{x} - \frac{1}{2}\right), & \hat{\Phi}_7(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}), \\ \hat{\Phi}_3(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\hat{y}\left(\hat{y} - \frac{1}{2}\right), & \hat{\Phi}_8(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}), \\ \hat{\Phi}_4(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\hat{z}\left(\hat{z} - \frac{1}{2}\right), & \hat{\Phi}_9(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{x}\hat{z}, \\ \hat{\Phi}_5(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}), & \hat{\Phi}_{10}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{y}\hat{z}.\end{aligned}$$

Les fonctions de base \mathcal{P}_3 en 3D Explicitons les fonctions de base \mathcal{P}_3 . En \mathcal{P}_3 , nous avons $N_p = 20$, voir la définition 5.4. Nous déduisons de la définition 5.6 que nous avons 20 fonctions de base en \mathcal{P}_3 données par

$$\begin{aligned}\hat{\Phi}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{9}{2}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\left(\frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}\right)\left(\frac{1}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}\right), & \hat{\Phi}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{9}{2}\hat{x}\left(\hat{x} - \frac{1}{3}\right)\left(\hat{x} - \frac{2}{3}\right), \\ \hat{\Phi}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{9}{2}\hat{y}\left(\hat{y} - \frac{1}{3}\right)\left(\hat{y} - \frac{2}{3}\right), & \hat{\Phi}_4(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{9}{2}\hat{z}\left(\hat{z} - \frac{1}{3}\right)\left(\hat{z} - \frac{2}{3}\right), \\ \hat{\Phi}_5(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\left(\frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}\right), & \hat{\Phi}_6(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\left(\hat{x} - \frac{1}{3}\right), \\ \hat{\Phi}_7(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\left(\hat{x} - \frac{1}{3}\right)\hat{y}, & \hat{\Phi}_8(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{y}\left(\hat{y} - \frac{1}{3}\right), \\ \hat{\Phi}_9(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{y}\left(\hat{y} - \frac{1}{3}\right)(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}), & \hat{\Phi}_{10}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\left(\frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}\right), \\ \hat{\Phi}_{11}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{z}\left(\frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}\right)(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}), & \hat{\Phi}_{12}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z})\left(\hat{z} - \frac{1}{3}\right), \\ \hat{\Phi}_{13}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{z}\left(\hat{x} - \frac{1}{3}\right), & \hat{\Phi}_{14}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{z}\left(\hat{z} - \frac{1}{3}\right), \\ \hat{\Phi}_{15}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{y}\hat{z}\left(\hat{y} - \frac{1}{3}\right), & \hat{\Phi}_{16}(\hat{\mathbf{x}}) &= \frac{27}{2}\hat{y}\hat{z}\left(\hat{z} - \frac{1}{3}\right), \\ \hat{\Phi}_{17}(\hat{\mathbf{x}}) &= 27\hat{x}\hat{y}\hat{z}, & \hat{\Phi}_{18}(\hat{\mathbf{x}}) &= 27\hat{y}\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}), \\ \hat{\Phi}_{19}(\hat{\mathbf{x}}) &= 27\hat{x}\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}), & \hat{\Phi}_{20}(\hat{\mathbf{x}}) &= 27\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}).\end{aligned}$$

Remarque 5.12. Nous illustrons uniquement en 1D les fonctions de base avec la figure 5.8.

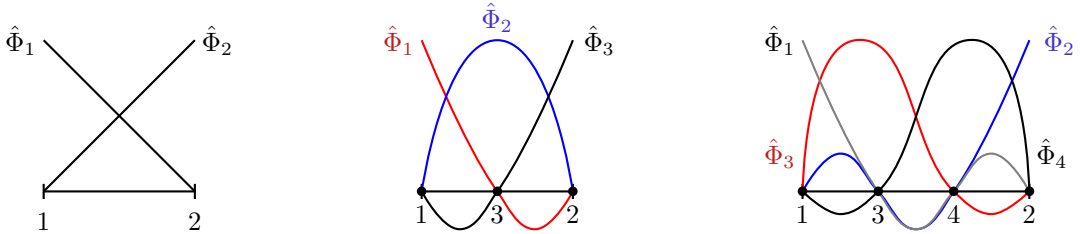


FIGURE 5.8 – Fonctions de base $\hat{\Phi}_i$ en P_1 , P_2 et P_3 en 1D

Passons maintenant au calcul des différentes matrices du schéma.

5.2.4 Calcul de la matrice de masse \mathcal{M}

La matrice de masse \mathcal{M} est diagonale par blocs

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}^1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{M}^{NT_h} \end{pmatrix}, \quad (5.52)$$

où chacun des blocs \mathcal{M}^k est carré de taille N_p

$$\mathcal{M}_{i,j}^K = \int_K \Phi_i^K(\mathbf{x}) \Phi_j^K(\mathbf{x}). \quad (5.53)$$

De plus, en utilisant les éléments de référence présentés plus haut et en effectuant le changement de variables $\mathbf{x} = F_K(\hat{\mathbf{x}})$, nous obtenons

$$\int_K \Phi_i^K(\mathbf{x}) \Phi_j^K(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\hat{K}} \Phi_i^K(F_K(\hat{\mathbf{x}})) \Phi_j^K(F_K(\hat{\mathbf{x}})) |\det J_{F_K}(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}}. \quad (5.54)$$

D'après la relation (5.51) entre les fonctions de bases sur l'élément K et \hat{K} , nous avons

$$\mathcal{M}_{i,j}^K = |\det A_K| \int_{\hat{K}} \hat{\Phi}_i(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\Phi}_j(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}. \quad (5.55)$$

Remarque 5.13. *Les blocs de la matrice de masse \mathcal{M} sont proportionnels entre eux. C'est pratique pour le calcul car nous aurons qu'un seul bloc à inverser.*

5.2.5 Calcul de la matrice de raideur \mathcal{K}

Passons maintenant au calcul de la matrice de raideur \mathcal{K} . Nous supposons ici que la célérité est constante par maille.

La matrice de raideur n'est pas diagonale par bloc, c'est pourquoi nous introduisons une notation globale des fonctions de base

$$\Phi_i(\mathbf{x}) = \Phi_I^K(\mathbf{x}), \quad (5.56)$$

avec $i = kN_p + I$ et k la numérotation du tétraèdre K ($1 \leq k \leq NT_h$).

Remarque 5.14. *Nous utiliserons maintenant les indices i et j pour la notation globale, c'est à dire que i et j sont compris entre 1 et NP_h . Pour la notation locale nous utiliserons I et J qui eux sont entre 1 et N_p . Plus précisément, nous avons les relations suivantes*

$$\begin{cases} i = kN_p + I, \\ j = kN_p + J. \end{cases} \quad (5.57)$$

Il suit

$$\mathcal{K} = (\mathcal{K}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq NP_h}, \quad (5.58)$$

avec

$$\mathcal{K}_{i,j} = a_h(\Phi_i, \Phi_j). \quad (5.59)$$

Reprenons maintenant la définition (5.40) et explicitons $a_h(\Phi_i, \Phi_j)$

$$\begin{aligned}
a_h(\Phi_i, \Phi_j) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K c^2 \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} \int_F \frac{\Phi_i(\mathbf{x})}{r^*} \Phi_j(\mathbf{x}) \\
&- \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F \left([[\Phi_j(\mathbf{x})]] \cdot \{\{\nabla \Phi_i(\mathbf{x})\}\} + \{\{\nabla \Phi_j(\mathbf{x})\}\} \cdot [[\Phi_i(\mathbf{x})]] + \gamma [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot [[\Phi_j(\mathbf{x})]] \right) \\
&- \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left([[\Phi_j(\mathbf{x})]] \cdot \{\{\nabla \Phi_i(\mathbf{x})\}\} + [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot \{\{\nabla \Phi_j(\mathbf{x})\}\} + \gamma [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot [[\Phi_j(\mathbf{x})]] \right).
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Pour plus de clarté, introduisons les notations suivantes

$$\left\{ \begin{aligned}
(K_1)_{i,j} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K c^2 \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi_j(\mathbf{x}), \\
(K_2)_{i,j} &= \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F [[\Phi_j(\mathbf{x})]] \cdot \{\{\nabla \Phi_i(\mathbf{x})\}\} + [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot \{\{\nabla \Phi_j(\mathbf{x})\}\}, \\
(K_3)_{i,j} &= \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F [[\Phi_j(\mathbf{x})]] \cdot \{\{\nabla \Phi_i(\mathbf{x})\}\} + \{\{\nabla \Phi_j(\mathbf{x})\}\} \cdot [[\Phi_i(\mathbf{x})]], \\
(K_4)_{i,j} &= \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \gamma [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot [[\Phi_j(\mathbf{x})]], \\
(K_5)_{i,j} &= \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F \gamma [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot [[\Phi_j(\mathbf{x})]], \\
(K_6)_{i,j} &= \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} \int_F \frac{\Phi_i(\mathbf{x})}{r^*} \Phi_j(\mathbf{x}).
\end{aligned} \right. \tag{5.61}$$

Nous avons alors

$$\mathcal{K}_{i,j} = a_h(\Phi_i, \Phi_j) = (K_1)_{i,j} + (K_6)_{i,j} - [(K_2)_{i,j} + (K_3)_{i,j} + (K_4)_{i,j} + (K_5)_{i,j}]. \tag{5.62}$$

Nous allons calculer chacune de ces sommes d'intégrales.

Calcul de $(K_1)_{i,j}$

En utilisant le fait que

$$\Phi_i|_K(\mathbf{x}) = \hat{\Phi}_I \circ F_K^{-1}(\mathbf{x}) \text{ et } \Phi_j|_K(\mathbf{x}) = \hat{\Phi}_J \circ F_K^{-1}(\mathbf{x}), \tag{5.63}$$

nous en déduisons

$$\nabla \Phi_i|_K(\mathbf{x}) = (J_{F_K}^{-1})^T \nabla \hat{\Phi}_I \circ F_K^{-1}(\mathbf{x}) \text{ et } \nabla \Phi_j|_K(\mathbf{x}) = (J_{F_K}^{-1})^T \nabla \hat{\Phi}_J \circ F_K^{-1}(\mathbf{x}). \tag{5.64}$$

Or $(J_{F_K}^{-1})^T = (A_K^{-1})^T$ et pour simplifier nous notons $A_K^{-T} := (A_K^{-1})^T$. Il suit en notant c_K la célérité de l'onde sur la maille K

$$\begin{aligned}
\int_K c_K^2 \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= c_K^2 \int_K (\nabla \Phi_i(\mathbf{x}))^T \nabla \Phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= c_K^2 \int_K (A_K^{-T} \nabla \hat{\Phi}_I \circ F_K^{-1}(\mathbf{x}))^T A_K^{-T} \nabla \hat{\Phi}_J \circ F_K^{-1}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

En posant $\hat{\mathbf{x}} = F_K^{-1}(\mathbf{x})$, il suit

$$\int_K c_K^2 \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\det A_K| c_K^2 \int_{\hat{K}} \nabla \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}})^T A_K^{-1} A_K^{-T} \nabla \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}. \tag{5.65}$$

Nous pouvons noter que nous avons dans l'intégrale sur l'élément de référence le terme $A_K^{-1} A_K^{-T}$ qui dépend de K . Posons $C^K = A_K^{-1} A_K^{-T}$, C^K est une matrice symétrique de dimension 3×3 déterminée par les coefficients $C_{11}^K, C_{12}^K, C_{13}^K, C_{22}^K, C_{23}^K$ et C_{33}^K . Nous vérifions assez facilement en $3D$ que

$$\begin{aligned} \nabla \hat{\Phi}_I^T(\hat{\mathbf{x}}) A_K^{-1} A_K^{-T} \nabla \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) &= C_{11}^K \left(\partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) + C_{12}^K \left(\partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) + \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) \\ &+ C_{13}^K \left(\partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) + \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) + C_{22}^K \left(\partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) \\ &+ C_{23}^K \left(\partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) + \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) + C_{33}^K \left(\partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right). \end{aligned} \quad (5.66)$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned} (K_1)_{i,j} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\det A_K| c_K^2 \left[C_{11}^K \left(\int_{\hat{K}} \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) + C_{12}^K \left(\int_{\hat{K}} \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) \right. \\ &+ \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \left. \right) + C_{13}^K \left(\int_{\hat{K}} \partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) + \partial_{\hat{x}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) \\ &+ C_{22}^K \left(\int_{\hat{K}} \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) + C_{23}^K \left(\int_{\hat{K}} \partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) + \partial_{\hat{y}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) \\ &+ C_{33}^K \left(\int_{\hat{K}} \partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_I(\hat{\mathbf{x}}) \partial_{\hat{z}} \hat{\Phi}_J(\hat{\mathbf{x}}) \right) \left. \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Nous avons pour le premier terme de \mathcal{K}_{ij} des intégrales locales qui dépendent uniquement de l'élément de référence. Passons maintenant aux intégrales combinant saut et moyenne.

Calcul de $(K_2)_{i,j}$

Pour les faces internes, nous utilisons la définition 5.1 du saut et de la moyenne et nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_F [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot \{ \{ \nabla \Phi_j(\mathbf{x}) \} \} + \{ \{ \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) \} \} \cdot [[\Phi_j(\mathbf{x})]] &= \frac{1}{2} \int_F [(\Phi_i^+(\mathbf{x}) n^+ + \Phi_i^-(\mathbf{x}) n^-) \cdot (\nabla \Phi_j^+(\mathbf{x}) + \nabla \Phi_j^-(\mathbf{x})) \\ &+ (\Phi_j^+(\mathbf{x}) n^+ + \Phi_j^-(\mathbf{x}) n^-) \cdot (\nabla \Phi_i^+(\mathbf{x}) + \nabla \Phi_i^-(\mathbf{x}))]. \end{aligned} \quad (5.68)$$

En développant il suit

$$\begin{aligned} \int_F [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot \{ \{ \nabla \Phi_j(\mathbf{x}) \} \} + \{ \{ \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) \} \} \cdot [[\Phi_j(\mathbf{x})]] &= \frac{1}{2} \int_F [\Phi_i^+(\mathbf{x}) n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+(\mathbf{x}) + \Phi_i^+(\mathbf{x}) n^+ \cdot \nabla \Phi_j^-(\mathbf{x}) \\ &+ \Phi_i^-(\mathbf{x}) n^- \cdot \nabla \Phi_j^-(\mathbf{x}) + \Phi_i^-(\mathbf{x}) n^- \cdot \nabla \Phi_j^+(\mathbf{x}) + \Phi_j^+(\mathbf{x}) n^+ \cdot \nabla \Phi_i^+(\mathbf{x}) + \Phi_j^+(\mathbf{x}) n^+ \cdot \nabla \Phi_i^-(\mathbf{x}) \\ &+ \Phi_j^-(\mathbf{x}) n^- \cdot \nabla \Phi_i^-(\mathbf{x}) + \Phi_j^-(\mathbf{x}) n^- \cdot \nabla \Phi_i^+(\mathbf{x})]. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Remarque 5.15. Cette intégrale est calculée en deux temps, les termes en rouge sont calculés quand nous sommes sur l'élément K^+ , les termes en noir quand nous sommes sur K^- .

Remarque 5.16. Parmi les quatre intégrales en rouge de (5.69) nous avons des symétries en i et en j

$$\begin{cases} \int_F \Phi_i^+(\mathbf{x}) n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+(\mathbf{x}) + \int_F \Phi_j^+(\mathbf{x}) n^+ \cdot \nabla \Phi_i^+(\mathbf{x}), \\ \int_F \Phi_i^-(\mathbf{x}) n^- \cdot \nabla \Phi_j^-(\mathbf{x}) + \int_F \Phi_j^-(\mathbf{x}) n^- \cdot \nabla \Phi_i^-(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (5.70)$$

Suite aux remarques 5.15 et 5.16, nous ne calculons que les deux contributions en bleu de (5.70), le reste étant calculé lors du passage sur le voisin ou obtenu par symétrie. Nous calculons alors les intégrales

$$\begin{cases} K_{21}^+(i, j) = \int_F \Phi_i^+(\mathbf{x}) n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+(\mathbf{x}), \\ K_{22}^+(i, j) = \int_F \Phi_j^-(\mathbf{x}) n^- \cdot \nabla \Phi_i^+(\mathbf{x}) = - \int_F \Phi_j^-(\mathbf{x}) n^+ \cdot \nabla \Phi_i^+(\mathbf{x}). \end{cases} \quad (5.71)$$

Nous aurons alors

$$\begin{aligned} (K_2)_{i,j} = \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \frac{1}{2} & \left[K_{21}^+(i, j) + K_{21}^+(j, i) + K_{22}^+(i, j) + K_{22}^+(j, i) \right. \\ & \left. + K_{21}^-(i, j) + K_{21}^-(j, i) + K_{22}^-(i, j) + K_{22}^-(j, i) \right]. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Remarque 5.17. Une face interne $F \in \mathcal{F}_i$ est commune à deux éléments du maillage que nous notons K^+ et K^- , ce qui explique pourquoi nous trouvons à la fois une intégrale sur les éléments K^+ et K^- .

Commençons par le calcul de la première intégrale de (5.71). Remarquons que tous les termes de cette intégrale sont sur l'élément K^+ , nous ne tiendrons donc pas compte du $-$. Nous allons avoir besoin d'exprimer $\Phi_i|_F$, $\nabla \Phi_i|_F$, respectivement $\Phi_j|_F$, $\nabla \Phi_j|_F$ en fonction de $\hat{\Phi}_I|_F$, $\nabla \hat{\Phi}_I|_F$, respectivement $\hat{\Phi}_J|_F$, $\nabla \hat{\Phi}_J|_F$. Pour cela nous allons introduire de nouvelles définitions. Rappelons que nous avons noté \hat{F} la face de référence, c'est à dire le triangle $\hat{S}_1\hat{S}_2\hat{S}_3$ et \hat{K} notre élément de référence, c'est à dire le tétraèdre $\hat{S}_1\hat{S}_2\hat{S}_3\hat{S}_4$.

Définition 5.7. Le tétraèdre de référence \hat{K} a quatre faces que nous notons \hat{F}_i pour $i = 1, 2, 3, 4$. Les faces \hat{F}_i sont des triangles formés de trois sommets \hat{S}_j pour $j = 1, 2, 3, 4$ et $j \neq i$, voir la figure 5.9.

Remarque 5.18. A titre d'exemple nous avons $\hat{F} = \hat{F}_4$.

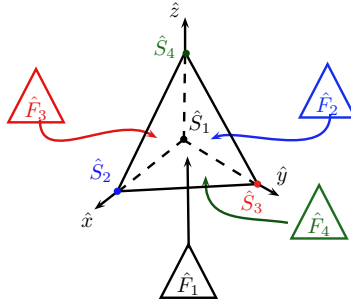
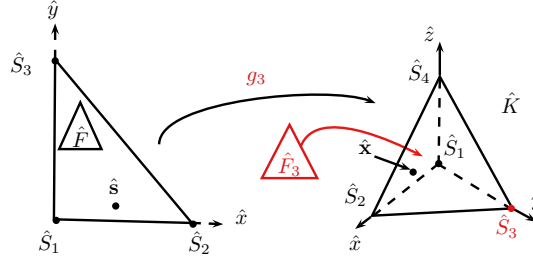


FIGURE 5.9 – Les faces \hat{F}_i du tétraèdre de référence \hat{K}

Définition 5.8. Nous notons g_i la fonction affine qui transforme un point de la face de référence \hat{F} (point en 2D) en un point de la face du tétraèdre de référence \hat{F}_i (point en 3D), voir la figure 5.10 qui illustre la fonction affine g_3 .

Notons $\hat{\mathbf{s}} = (\hat{x}, \hat{y})$ un point de la face de référence \hat{F} , la définition 5.8 donne

$$F_K \circ g_i(\hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{x} \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{s}} = g_i^{-1} \circ F_K^{-1}(\mathbf{x}). \quad (5.73)$$

FIGURE 5.10 – La fonction g_3

Revenons au calcul de K_{21} . En posant $\mathbf{x} = F_{K^+} \circ g_i(\hat{\mathbf{s}})$, nous avons

$$K_{21} = \int_{\hat{F}_i} \Phi_i^+(F_{K^+} \circ g_i(\hat{\mathbf{s}})) n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+(F_{K^+} \circ g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\mathbf{s}, \quad (5.74)$$

avec $ds = 2a_F d\hat{\mathbf{s}}$ et a_F l'aire de la face F . Il suit

$$K_{21} = 2a_F \int_{\hat{F}_i} \Phi_i^+(F_{K^+} \circ g_i(\hat{\mathbf{s}})) n^+ \cdot \nabla \Phi_j^+(F_{K^+} \circ g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}}. \quad (5.75)$$

Or nous avons

$$\Phi_i^+(\mathbf{x}) = \hat{\Phi}_I \circ F_{K^+}^{-1}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \nabla \Phi_i^+(\mathbf{x}) = A_{K^+}^{-T} \nabla \hat{\Phi}_I \circ F_{K^+}^{-1}(\mathbf{x}). \quad (5.76)$$

Il suit

$$K_{21}^+(i, j) = 2a_F \left(A_{K^+}^{-T} \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) \nabla \hat{\Phi}_J(g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}} \right) \cdot n^+. \quad (5.77)$$

Pour le calcul de la deuxième intégrale de (5.71), ça se complique car il y a à la fois des termes provenant de K^+ et de K^- . Nous allons avoir besoin d'introduire une nouvelle définition.

Définition 5.9. Soit h_m une fonction affine de \hat{F} dans \hat{F} telle que pour deux tétraèdres voisins K^+ et K^- nous avons

$$F_{K^+} \circ g_i(\hat{\mathbf{s}}) = F_{K^-} \circ g_i(h_m(\hat{\mathbf{s}})). \quad (5.78)$$

Commençons par calculer la deuxième intégrale de (5.71). Prenons $\hat{\mathbf{s}}$ un point de la face de référence \hat{F} et $\mathbf{x} = F_{K^+}(g_i(\hat{\mathbf{s}}))$ nous avons

$$K_{22}^+(i, j) = 2a_F \int_{\hat{F}} \Phi_j^- \circ F_{K^+}(g_i(\hat{\mathbf{s}})) n^- \cdot \nabla \Phi_i^+ \circ F_{K^+}(g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}}. \quad (5.79)$$

Or $\nabla \Phi_i^+ = A_{K^+}^{-T} \nabla \hat{\Phi}_I^+ \circ F_{K^+}^{-1}$, il suit

$$K_{22}^+(i, j) = 2a_F \int_{\hat{F}} \Phi_j^- \circ F_{K^+}(g_i(\hat{\mathbf{s}})) n^- \cdot A_{K^+}^{-T} \nabla \hat{\Phi}_I^+(g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}}. \quad (5.80)$$

Nous allons devoir retravailler le premier terme de l'intégrale. Il existe un m tel que

$$id = F_{K^-} \circ g_i(h_m(\hat{\mathbf{s}})) \circ g_i^{-1}(\hat{\mathbf{s}}) \circ F_{K^+}^{-1}. \quad (5.81)$$

Dans ce cas

$$\Phi_j^- \circ id \circ F_{K^+}(g_i(\hat{\mathbf{s}})) = \hat{\Phi}_J \circ g_i(h_m(\hat{\mathbf{s}})). \quad (5.82)$$

Il suit

$$K_{22}^+(i, j) = 2a_F A_{K^+}^{-T} \left(\int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_J \circ g_i(h_m(\hat{\mathbf{s}})) \nabla \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}} \right) \cdot n^-. \quad (5.83)$$

Calcul de $(K_3)_{i,j}$

Passons aux intégrales sur les faces avec des conditions de Dirichlet. D'après la définition 5.1, nous avons

$$(K_3)_{i,j} = \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} \int_F \Phi_j(\mathbf{x}) \cdot n \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) + \nabla \Phi_j(\mathbf{x}) \Phi_i(\mathbf{x}) \cdot n. \quad (5.84)$$

Calculons simplement le premier terme, l'autre est obtenu par symétrie. En reprenant ce que nous avons fait sur les faces internes nous avons

$$\int_F \Phi_j(\mathbf{x}) \cdot n \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) = 2a_F A_K^{-T} \left(\int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_J(g_i(\hat{\mathbf{s}})) \nabla \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}} \right) \cdot n. \quad (5.85)$$

Nous obtenons

$$(K_3)_{i,j} = \sum_{F \in \mathcal{F}_b} 2a_F A_K^{-T} \left(\int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_J(g_i(\hat{\mathbf{s}})) \nabla \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) + \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) \nabla \hat{\Phi}_J(g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}} \right) \cdot n. \quad (5.86)$$

Remarque 5.19. Pour une face du bord du domaine, $F \in \mathcal{F}_b$, la face appartient à un seul élément du maillage, c'est pourquoi il y a seulement l'intégrale sur K qui apparaît dans l'expression de $(K_3)_{i,j}$.

Calcul de $(K_4)_{i,j}$

Passons au calcul du terme de pénalisation pour les faces internes, par définition 5.1 du saut et de la moyenne nous avons

$$(K_4)_{i,j} = \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \gamma_K (\Phi_i^+(\mathbf{x})n^+ + \Phi_i^-(\mathbf{x})n^-) \cdot (\Phi_j^+(\mathbf{x})n^+ + \Phi_j^-(\mathbf{x})n^-). \quad (5.87)$$

Développons, nous obtenons

$$(K_4)_{i,j} = \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \gamma_K \int_F \left[\Phi_i^+(\mathbf{x})n^+ \cdot \Phi_j^+(\mathbf{x})n^+ + \Phi_i^+(\mathbf{x})n^+ \cdot \Phi_j^-(\mathbf{x})n^- \right. \\ \left. + \Phi_i^-(\mathbf{x})n^- \cdot \Phi_j^+(\mathbf{x})n^+ + \Phi_i^-(\mathbf{x})n^- \cdot \Phi_j^-(\mathbf{x})n^- \right]. \quad (5.88)$$

Comme nous l'avons fait pour le calcul des intégrales combinant saut et moyenne, nous ne calculons que les termes en rouge de l'équation (5.88), les autres seront déterminés lors du passage à l'élément voisin K^- . Après le changement de variable $\mathbf{x} = F_{K^+} \circ g_i(\hat{\mathbf{s}})$ nous obtenons

$$\begin{cases} \int_F \Phi_i^+(\mathbf{x})n^+ \cdot \Phi_j^+(\mathbf{x})n^+ = 2a_F \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) \hat{\Phi}_J(g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}}, \\ \int_F \Phi_i^+(\mathbf{x})n^+ \cdot \Phi_j^-(\mathbf{x})n^- = -2a_F \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) \hat{\Phi}_J(g_i \circ h_m(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}}. \end{cases} \quad (5.89)$$

Calcul de $(K_5)_{i,j}$

Pour le terme de pénalisation sur les faces de Dirichlet, nous avons

$$\int_F \gamma_K [[\Phi_i(\mathbf{x})]] [[\Phi_j(\mathbf{x})]] = \int_F \gamma_K \Phi_i(\mathbf{x})n \cdot \Phi_j(\mathbf{x})n = \gamma_K \int_F \Phi_i(\mathbf{x})\Phi_j(\mathbf{x}). \quad (5.90)$$

Il suit

$$\gamma_K \int_F \Phi_i(\mathbf{x})\Phi_j(\mathbf{x}) = 2a_F \gamma_K \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) \hat{\Phi}_J(g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}}. \quad (5.91)$$

Nous en déduisons

$$(K_5)_{i,j} = \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_\varepsilon} 2a_F \gamma_K \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) \hat{\Phi}_J(g_i(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}}. \quad (5.92)$$

Calcul de $(K_6)_{i,j}$

Enfin, pour l'intégrale sur les faces avec des CLA nous avons

$$(K_6)_{i,j} = \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} 2a_F \int_{\hat{F}} \frac{\hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}}))}{r^*} \hat{\Phi}_J(g_j(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}}. \quad (5.93)$$

Remarque 5.20. Pour l'implémentation, pour chaque tétraèdre, nous stockons cinq vecteurs de taille N_p : le premier correspond au tétraèdre courant, les quatre autres aux tétraèdres voisins. Ceci est un gros avantage niveau mémoire en comparaison par exemple avec la méthode des éléments finis (EF) dont les éléments ont beaucoup plus de voisins. En effet, rappelons que pour être voisins avec la méthode DG, deux éléments doivent avoir une face en commun alors qu'avec la méthode EF il suffit d'avoir un sommet en commun.

5.2.6 Calcul de la matrice d'amortissement \mathcal{B}

Nous avons la matrice d'amortissement \mathcal{B} qui vérifie

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq NP_h}, \quad (5.94)$$

avec

$$\mathcal{B}_{i,j} = \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} \int_F \Phi_i(\mathbf{x}) \Phi_j(\mathbf{x}). \quad (5.95)$$

Remarque 5.21. Les termes $\mathcal{B}_{i,j}$ ressemblent aux $\mathcal{M}_{i,j}$ sauf que nous intégrons sur une face et non sur tout le tétraèdre. La matrice \mathcal{B} est donc également diagonale par bloc. De plus, cette matrice est nulle partout sauf pour les éléments ayant au moins une face absorbante.

Par passage sur l'élément de référence, nous obtenons pour toute face absorbante

$$\int_F \Phi_i(\mathbf{x}) \Phi_j(\mathbf{x}) = 2a_F \int_{\hat{F}} \hat{\Phi}_I(g_i(\hat{\mathbf{s}})) \hat{\Phi}_J(g_j(\hat{\mathbf{s}})) d\hat{\mathbf{s}}. \quad (5.96)$$

Nous en avons fini avec le calcul mathématique des différentes matrices.

5.2.7 Discrétisation en temps

Après avoir vu la discrétisation en espace, regardons la discrétisation en temps de l'équation (5.14). La construction du schéma en temps d'ordre 2 repose sur des développements de Taylor d'ordre 3 ou 4. Rappelons que notre vecteur solution U_h est de composantes $u_{h,i}$. Pour le calcul de la dérivée première, considérons alors le développement de Taylor suivant

$$u_{h,i}(t + \Delta t) = u_{h,i}(t - \Delta t) + 2\Delta t \partial_t u_{h,i}(t - \Delta t) + 2\Delta t^2 \partial_t^2 u_{h,i}(t - \Delta t) + O_{\Delta t \rightarrow 0}(\Delta t^3). \quad (5.97)$$

Il suit

$$u_{h,i}(t + \Delta t) = u_{h,i}(t - \Delta t) + 2\Delta t \partial_t u_{h,i}(t) + O_{\Delta t \rightarrow 0}(\Delta t^3). \quad (5.98)$$

Nous obtenons finalement

$$\frac{u_{h,i}(t + \Delta t) - u_{h,i}(t - \Delta t)}{2\Delta t} = \partial_t u_{h,i}(t) + O_{\Delta t \rightarrow 0}(\Delta t^2).$$

Nous avons donc, par approximation

$$\frac{u_{h,i}^{n+1} - u_{h,i}^{n-1}}{2\Delta t} = \partial_t u_{h,i}(t_n) + O_{\Delta t \rightarrow 0}(\Delta t^2), \quad (5.99)$$

où $t_n = n\Delta t$ et $u_{h,i}^n$ est l'approximation de $u_{h,i}(t_n)$.

De même, pour la dérivée d'ordre 2, nous considérons alors le développement de Taylor suivant

$$u_{h,i}(t + \Delta t) + u_{h,i}(t - \Delta t) = 2u_{h,i}(t) + \Delta t^2 \partial_t^2 u_{h,i}(t) + O_{\Delta t \rightarrow 0}(\Delta t^4). \quad (5.100)$$

Nous obtenons

$$\frac{u_{h,i}(t + \Delta t) + u_{h,i}(t - \Delta t) - 2u_{h,i}(t)}{\Delta t^2} = \partial_t^2 u_{h,i}(t) + O_{\Delta t \rightarrow 0}(\Delta t^2). \quad (5.101)$$

Nous avons donc, par approximation

$$\frac{u_{h,i}^{n+1} + u_{h,i}^{n-1} - 2u_{h,i}^n}{\Delta t^2} = \frac{\partial^2 u_{h,i}(t_n)}{\partial t^2} + O_{\Delta t \rightarrow 0}(\Delta t^2). \quad (5.102)$$

Nous obtenons finalement le schéma en espace et en temps suivant

$$\mathcal{M} \frac{U_{n+1} + U_{n-1} - 2U_n}{\Delta t^2} + c \mathcal{B} \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2\Delta t} + c^2 \mathcal{K} U_n = -\mathcal{F}_h. \quad (5.103)$$

Nous pouvons aussi l'écrire sous la forme

$$\left(\mathcal{M} + c \frac{\Delta t}{2} \mathcal{B} \right) U_{n+1} = (2\mathcal{M} - c^2 \Delta t^2 \mathcal{K}) U_n + \left(c \frac{\Delta t}{2} \mathcal{B} - \mathcal{M} \right) U_{n-1} - \Delta t^2 \mathcal{F}_h, \quad (5.104)$$

où U_n est une approximation de $U_h(t_n)$. Le schéma est stable sous une condition CFL dépendant du paramètre γ .

Remarque 5.22. *Premièrement, remarquons que les matrices \mathcal{M} et \mathcal{B} sont diagonales par blocs. Ce schéma est donc explicite par bloc. Il ne nécessite l'inversion que de matrices de petites tailles ($N_p \times N_p$ avec N_p le nombre de degrés de liberté du tétraèdre de référence). C'est un des principaux avantages des méthodes DG par rapport aux méthodes d'éléments finis.*

Deuxièmement, comme les matrices \mathcal{M} et \mathcal{B} sont positives, il en est de même pour $\mathcal{M} + c \frac{\Delta t}{2} \mathcal{B}$. Nous en déduisons que les CLA ont un caractère stabilisateur.

Conclusion

Ce chapitre décrit le fonctionnement du code de l'équipe *Magique-3D* : la discrétisation en espace et en temps, la construction des matrices de masse, rigidité et d'amortissement. Nous n'avons pas mis les résultats numériques pour deux raisons :

- nous n'avons pas à disposition de solution de référence pour vérifier ;
- le code de l'équipe *Magique-3D* est robuste, je considère que c'est une solution de référence pour comparer mes prochaines expériences numériques que je détaille dans les chapitres 6 et 7.

Il ne faut pas considérer que j'étais simple utilisatrice du code. C'est la première fois que ce code est utilisé dans le cas d'une étude numérique liée à une analyse asymptotique multi-échelle.

Chapitre 6

Résolution avec la méthode des développements asymptotiques raccordés

Ce chapitre est, à mon sens, le plus amusant de cette thèse. Nous allons mettre en place la méthode des développements asymptotiques raccordés (MAE) pour notre problème avec petit obstacle. Nous expliciterons dans les sections 6.1 et 6.2 les outils numériques pour cette mise en œuvre. Ensuite, dans la section 6.3, nous montrerons les résultats numériques et en particulier, nous verrons que l'onde se propage dans le domaine comme s'il y avait un obstacle au centre alors qu'il n'est pas maillé.

6.1 Contexte d'étude pour la résolution avec la méthode MAE (Matched Asymptotic Expansions)

Le domaine sur lequel nous allons travailler diffère de celui du chapitre 5. La génération du maillage est une tâche beaucoup plus facile car elle ne nécessite pas de traitement particulier au voisinage de l'origine. Nous travaillons donc sur toute la boule de rayon r^*

$$B_{r^*} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq r^*\}, \quad (6.1)$$

que nous avons représentée sur la figure 6.1. Dans l'expérience numérique nous prenons $r^* = 1$.

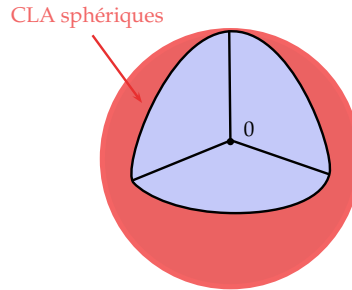


FIGURE 6.1 – Domaine considéré pour la méthode MAE

Nous allons également mettre des CLA sphériques (Conditions aux Limites Absorbantes) sur la sphère unité. Comme nous l'avons vu au chapitre 5, en dimension 3, les conditions de Bayliss,

Gunzburger et Turkel d'ordre 2 pour la sphère de rayon r^* s'écrivent sous la forme

$$\frac{\partial_t \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \partial_r \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \frac{\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{r^*}}{c} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_{r^*} \times [0, T], \quad (6.2)$$

avec $\Gamma_{r^*} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = r^*\}$ la sphère de rayon r^* . Rappelons à présent l'équation des ondes acoustiques

$$c^2 \Delta \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad \text{sur } \Omega_\varepsilon \times [0, T], \quad (6.3)$$

avec c la vitesse de propagation de l'onde. La vitesse de propagation c est continue dans chaque maille. Rappelons que la source f , définie en (5.6) et (5.7), est une gaussienne avec

$$\mathbf{0} \notin \text{supp}(f(\cdot, t)). \quad (6.4)$$

Dans l'expérience numérique, nous plaçons la source en $\mathbf{x}_s = (0, 0.3, 0)$. Rappelons que nous notons \tilde{u}_ε la solution du problème sur Ω_ε .

Remarque 6.1. *Notre solution \tilde{u}_ε vérifie l'équation des ondes sur Ω_ε et n'est pas définie en $\mathbf{0}$ comme nous avons pu le voir dans la partie I. Ses approximations ne seront pas définies dans un voisinage de l'origine.*

Enfin nous prenons des conditions initiales nulles

$$\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{sur } \Omega_\varepsilon. \quad (6.5)$$

Pour résumer, nous avons alors le problème suivant

$$\begin{cases} c^2 \Delta \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), & \text{sur } \Omega_\varepsilon \times [0, T], \\ \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{sur } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial_t \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \partial_r \tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \frac{\tilde{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{r^*}}{c} = 0, & \text{sur } \Gamma_{r^*} \times [0, T]. \end{cases} \quad (6.6)$$

6.2 Mise en oeuvre de la méthode MAE

Dans le chapitre d'introduction, nous avons vu que le développement asymptotique de la solution du problème (6.6) donnait

à l'ordre 0

$$u_{\varepsilon,0}(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t), \quad (6.7)$$

à l'ordre 1

$$u_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) - \frac{u_0(\mathbf{0}, t - r/c)}{r} \varepsilon, \quad (6.8)$$

à l'ordre 2

$$u_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) - \frac{u_0(\mathbf{0}, t - r/c)}{r} \varepsilon - \frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t - r/c)}{rc} \varepsilon^2, \quad (6.9)$$

et enfin la modification de l'ordre 2 donne

$$u_{\varepsilon,2}^m(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x}, t) - \frac{u_0(\mathbf{0}, t + \tau - r/c)}{r} \varepsilon, \quad (6.10)$$

avec u_0 la solution du problème sans obstacle dans le domaine et $\tau = \varepsilon/c$.

La première étape pour implémenter la méthode MAE consiste à calculer la solution u_0 du problème

$$\begin{cases} c^2 \Delta u_0(\mathbf{x}, t) - \partial_t^2 u_0(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), & \text{sur } B_{r^*} \times [0, T], \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{sur } B_{r^*}, \\ \frac{\partial_t u_0(\mathbf{x}, t) + \partial_r u_0(\mathbf{x}, t) + u_0(\mathbf{x}, t)}{c} = 0, & \text{sur } \Gamma_{r^*} \times [0, T]. \end{cases} \quad (6.11)$$

C'est ce que nous faisons à l'aide de la méthode DG. Rappelons ce que nous avons vu au chapitre 5.

6.2.1 Calcul de u_0

Discretisation en espace

Au chapitre 5, nous avons construit le problème semi-discretisé de (5.10) et nous avons obtenu le système linéaire suivant

$$\mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} U_h + c \mathcal{B} \frac{d}{dt} U_h + c^2 \mathcal{K} U_h = -\mathcal{F}, \quad (6.12)$$

où U_h est le vecteur de composantes $u_{h,i}$, \mathcal{M} est la matrice de masse (**diagonale par bloc**), \mathcal{B} est la matrice absorbante (**nulle partout sauf pour les degrés de liberté correspondants à la frontière extérieure**), \mathcal{K} est la matrice de rigidité (**symétrique**) et \mathcal{F} est le vecteur source.

Maintenant, pour résoudre le problème (6.11), nous ne devons plus prendre en compte les conditions de Dirichlet. Nous allons avoir une « nouvelle » forme bilinéaire symétrique \bar{a}_h sur $V_h \times V_h$ telle que

$$\begin{aligned} \bar{a}_h(u_0, v) := & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_0(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla v(\mathbf{x}, t) + \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} \int_F \frac{u_0(\mathbf{x}, t)}{r^*} v(\mathbf{x}, t) \\ & - \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left([[v(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla u_0(\mathbf{x}, t)\}\} + [[u_0(\mathbf{x}, t)]] \cdot \{\{\nabla v(\mathbf{x}, t)\}\} + \gamma [[u_0(\mathbf{x}, t)]] \cdot [[v(\mathbf{x}, t)]] \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

La solution u_0 vérifiera donc le système semi discretisé suivant

$$\begin{cases} (\partial_t^2 u_0, v) + c b_h(u_0, v) + c^2 \bar{a}_h(u_0, v) = -(f, v), \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t u_0(\mathbf{x}, 0) = 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

Nous obtenons le système linéaire suivant

$$\mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} U_h^0 + c \mathcal{B} \frac{d}{dt} U_h^0 + c^2 \bar{\mathcal{K}} U_h^0 = -\mathcal{F}, \quad (6.15)$$

avec U_h^0 le vecteur de composantes $u_0(P_i, t)$, \mathcal{M} la matrice de masse définie dans la section 5.2.4, \mathcal{B} la matrice d'amortissement définie en 5.2.6, \mathcal{F} le vecteur source et $\bar{\mathcal{K}}$ la matrice de rigidité qui diffère de celle du chapitre 5.

Remarque 6.2. *Nous avons déjà déterminé au chapitre 5 les matrices \mathcal{M} et \mathcal{B} de façon détaillée. Il manque la construction de $\bar{\mathcal{K}}$, c'est ce que nous allons faire dans la section 6.2.1.*

Calcul de la matrice de raideur $\bar{\mathcal{K}}$

Puisque la forme bilinéaire \bar{a}_h est semblable à a_h , la construction de $\bar{\mathcal{K}}$ va être similaire à celle de \mathcal{K} . Reprenons donc ce que nous avons fait dans la section 5.2.5. En particulier, nous avons vu que

$$\mathcal{K}_{i,j} = a_h(\Phi_i, \Phi_j). \quad (6.16)$$

avec Φ_i, Φ_j des fonctions de base de l'espace variationnel V_h . En procédant de la même façon, pour $\bar{\mathcal{K}}$ nous avons

$$\bar{\mathcal{K}}_{i,j} = \bar{a}_h(\Phi_i, \Phi_j). \quad (6.17)$$

Par définition de \bar{a}_h , voir (6.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{K}}_{i,j} = \bar{a}_h(\Phi_i, \Phi_j) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \Phi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \sum_{F \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_{r^*}} \int_F \frac{\Phi_i(\mathbf{x})}{r^*} \Phi_j(\mathbf{x}) \\ &- \sum_{F \in \mathcal{F}_i} \int_F \left([[\Phi_j(\mathbf{x})]] \cdot \{\{\nabla \Phi_i(\mathbf{x})\}\} + [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot \{\{\nabla \Phi_j(\mathbf{x})\}\} + \gamma [[\Phi_i(\mathbf{x})]] \cdot [[\Phi_j(\mathbf{x})]] \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Remarque 6.3. Nous avons déjà explicité ces intégrales dans la section 5.2.5.

Reprenons les notations de la section 5.2.5, nous avons

$$\bar{\mathcal{K}}_{i,j} = K_1 + K_6 - K_2 - K_4. \quad (6.19)$$

Nous renvoyons donc à cette section pour le détail de K_1 , K_2 , K_4 et K_6 . Nous avons donc toutes les matrices pour implémenter (6.15).

Discretisation en temps

Reprenons les approximations que nous avons vues dans la section (5.2.7)

$$\partial_t u_{h,i}^n \simeq \frac{u_{h,i}^{n+1} - u_{h,i}^{n-1}}{2\Delta t}, \quad (6.20)$$

où $u_{h,i}^n := u_{h,i}(n\Delta t)$ et $u_{h,i}$ sont les coordonnées de U_h . Nous avons aussi

$$\partial_t^2 u_{h,i}^n \simeq \frac{u_{h,i}^{n+1} + u_{h,i}^{n-1} - 2u_{h,i}^n}{\Delta t^2}. \quad (6.21)$$

L'équation (6.15) donne

$$\mathcal{M} \frac{U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}}{\Delta t^2} + c \mathcal{B} \frac{U_{n+1} - U_{n-1}}{2\Delta t} + c^2 \bar{\mathcal{K}} U_n = -\mathcal{F}. \quad (6.22)$$

En simplifiant nous obtenons

$$(\mathcal{M} + c \frac{\Delta t}{2} \mathcal{B}) U_{n+1} = (2\mathcal{M} - c^2 \Delta t^2 \bar{\mathcal{K}}) U_n + (c \frac{\Delta t}{2} \mathcal{B} - \mathcal{M}) U_{n-1} - \Delta t^2 \mathcal{F}, \quad (6.23)$$

avec $U_n = U_h(n\Delta t)$. Nous obtenons ainsi la solution u_0 du problème (6.11) sur $B_{r^*} \times [0, T]$. Voyons à présent l'algorithme pour la méthode MAE.

6.2.2 Calcul des termes d'ordre supérieur

Le calcul des termes du développement asymptotique

$$\begin{cases} u_1(\mathbf{x}, t) = -\frac{u_0(\mathbf{0}, t - r/c)}{r}, \\ u_2(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial_t u_0(\mathbf{0}, t - r/c)}{rc}, \end{cases} \quad (6.24)$$

passé par l'évaluation de trois fonctions

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r}, \\ \psi_1(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{0}, t - r/c), \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) = \partial_t u_0(\mathbf{0}, t - r/c). \end{cases} \quad (6.25)$$

La fonction nodale ϕ n'est pas définie en $\mathbf{0}$ mais partout ailleurs sur le maillage. La construction de ϕ s'effectue tétraèdre par tétraèdre et sur chaque degré de liberté du tétraèdre courant. Nous obtenons ainsi exactement l'évaluation de $1/r$ en chaque degré de liberté du maillage hormis en l'origine.

Pour la construction des fonctions ψ_1 et ψ_2 , nous commençons par réaliser une expérience numérique complète et nous stockons les valeurs ponctuelles $u_0(\mathbf{0}, t)$ sur la grille en temps t_n . Détaillons l'opérateur de valeur ponctuelle.

Opérateur de valeur ponctuelle

Bien que l'ensemble des fonctions H^1 ne soit pas localement \mathcal{C}^0 , l'espace de recherche de l'approximation est continu par morceaux. Il est donc possible d'évaluer la valeur de l'approximation numérique en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Plaçons nous dans le tétraèdre K_0 qui contient l'origine $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. L'approximation de la solution u_0 dans ce tétraèdre s'écrit

$$u_0(\mathbf{x}, t_n) = \sum_{i=1}^{N_p} u_0(P_i, t_n) \Phi_i^{K_0}(\mathbf{x}), \quad (6.26)$$

avec $\Phi_i^{K_0}$ les fonctions de bases du tétraèdre K_0 et P_i les coordonnées des degrés de liberté du tétraèdre. Cette expression peut être évaluée en l'origine

$$u_0(\mathbf{0}, t_n) = \sum_{i=1}^{N_p} u_0(P_i, t_n) \Phi_i^{K_0}(\mathbf{0}). \quad (6.27)$$

Cette approche est justifiée par la théorie des inégalités inverses qui nous permet d'affirmer que la valeur ponctuelle de la solution u_0 est bien approchée par celle de l'approximation numérique. Cette théorie n'est pas l'objet de cette thèse mais nous avons proposé une estimation non optimale en annexe D.

Ensuite, pour construire u_1 au temps t , nous évaluons $\frac{r}{c}$ pour chaque degré de liberté et nous associons deux temps discrets t_n^i et t_{n+1}^i qui entourent le temps $t - \frac{r_i}{c}$

$$t_n^i = E\left(\frac{t - r_i/c}{\Delta t}\right) \Delta t, \quad (6.28)$$

$$t_{n+1}^i = t_n^i + \Delta t. \quad (6.29)$$

Puis nous approchons $u_0(\mathbf{0}, t - r_i/c)$ à l'aide d'une moyenne barycentrique

$$u_0(\mathbf{0}, t - r_i/c) \simeq (1 - \alpha) u_0(\mathbf{0}, t_n^i) + \alpha u_0(\mathbf{0}, t_{n+1}^i), \quad (6.30)$$

avec

$$\alpha = \frac{t - r_i/c - t_n^i}{\Delta t} \in [0, 1]. \quad (6.31)$$

Dans le cas de l'évaluation de u_2 , une approximation de la dérivée en temps est nécessaire. Elle est approchée à l'aide d'une différence finie centrée

$$\partial_t u_0(\mathbf{0}, t_n) = \frac{u_0(\mathbf{0}, t_{n+1}) - u_0(\mathbf{0}, t_{n-1})}{2\Delta t} + O_{\Delta t \rightarrow 0}(\Delta t^2), \quad (6.32)$$

avec $t_n = n\Delta t$.

6.3 Résultats numériques

Dans cette partie nous allons comparer les résultats obtenus avec la méthode MAE et ceux obtenus de façon directe, c'est à dire dans le contexte du chapitre 5. Pour avoir une idée en 3D,

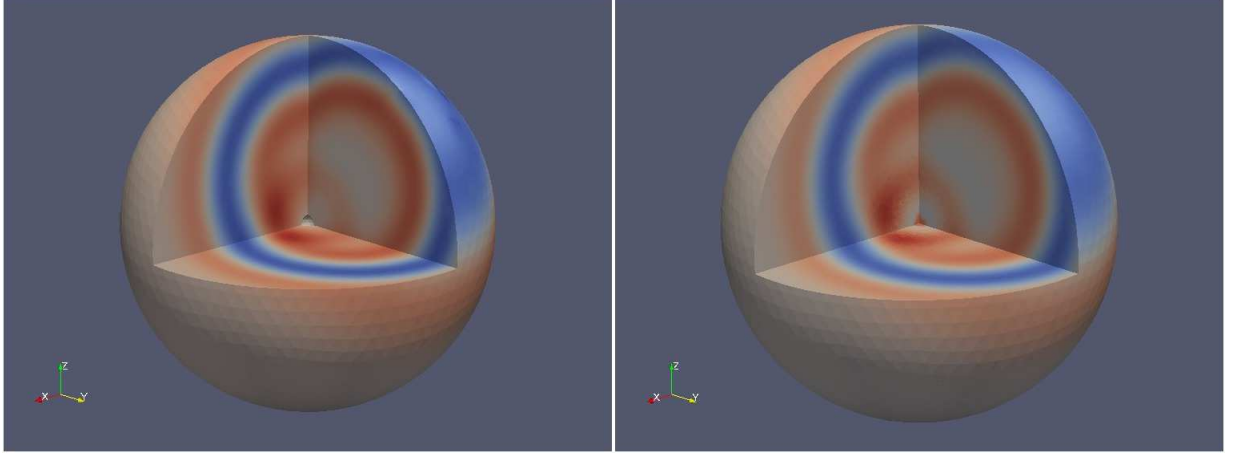


FIGURE 6.2 – Comparaison de la méthode directe (à droite) et de la méthode MAE (à gauche)

le lecteur peut consulter la page web <https://team.inria.fr/magique3d/multiscale-modeling-for-time-domain-wave-equation/>. Nous avons mis un cliché dans la figure 6.2. Dans cette partie nous travaillerons avec les résultats de six récepteurs placés en $\mathbf{x}_{R_1} = (0, 0.4, 0)$, $\mathbf{x}_{R_2} = (0, 0.2, 0)$, $\mathbf{x}_{R_3} = (0, -0.2, 0)$, $\mathbf{x}_{R_4} = (0, 0, 0.5)$, $\mathbf{x}_{R_5} = (0, -0.4, 0)$ et $\mathbf{x}_{R_6} = (0, -0.6, 0)$. Nous avons illustré la position des capteurs à l'aide de la figure 6.3. Dans un premier temps regardons à partir de

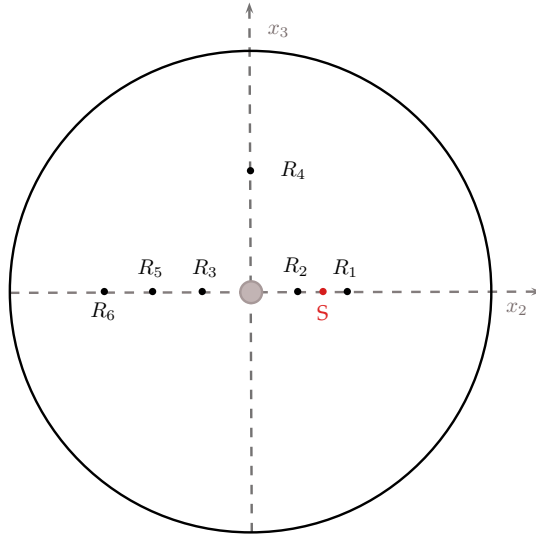


FIGURE 6.3 – Position des capteurs et de la source

quel raffinement nous obtenons une solution correcte pour u_0 , c'est à dire pour le problème sans obstacle.

6.3.1 Validation de la solution u_0

Nous avons réalisé les simulations numériques sur trois différents maillages. Détaillons les caractéristiques de chacun

- maillage 1 : 87 817 tétraèdres, volume maximal d'un élément : 8.10^{-5} ,

- maillage 2 : 119 526 tétraèdres, volume maximal d'un élément : 6.10^{-5} ,
 - maillage 3 : 243 979 tétraèdres, volume maximal d'un élément : 3.10^{-5} .
- Nous représentons le maillage 3 dans la figure 6.4.

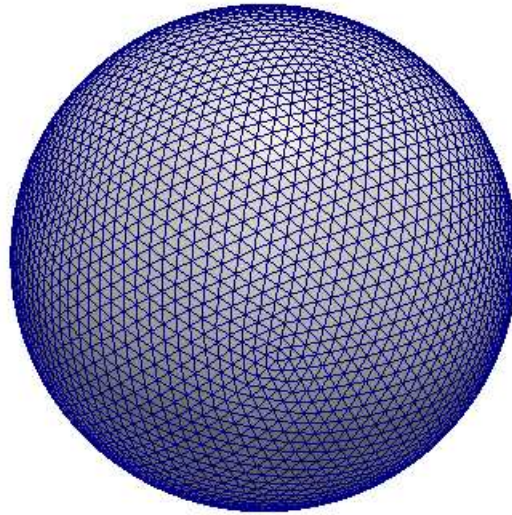


FIGURE 6.4 – Maillage 3

À partir de ces trois maillages nous définissons six configurations (classées par ordre croissant de nombre de degrés de liberté)

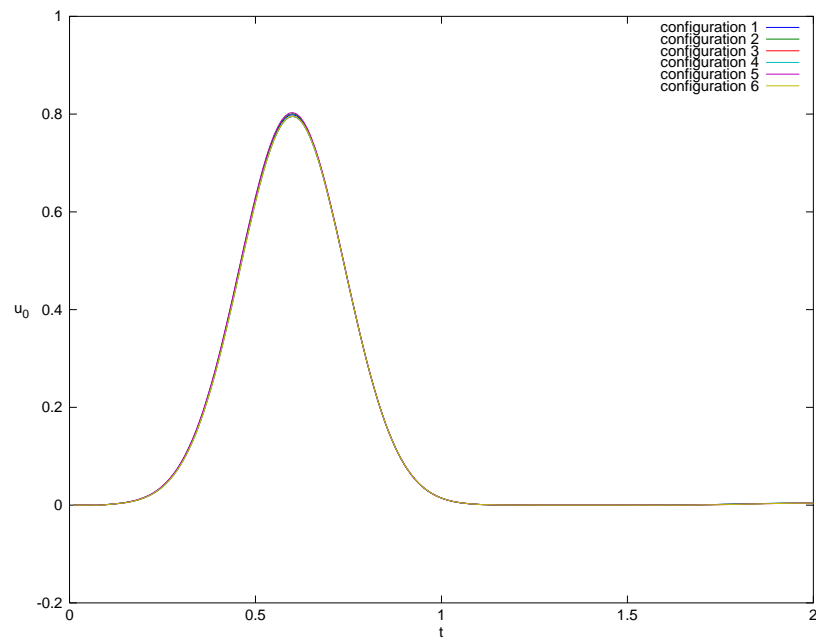
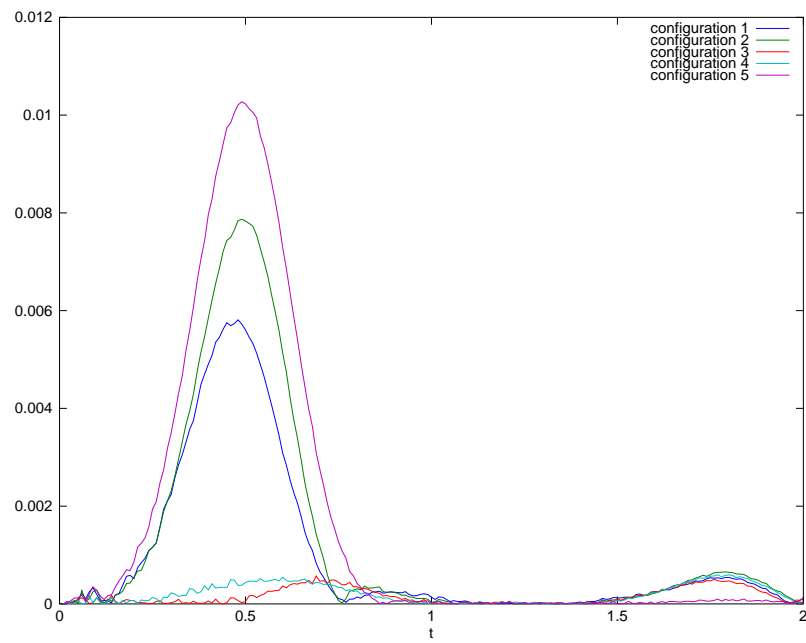
- la configuration 1 correspond à une approximation P_2 sur le maillage 1,
- la configuration 2 correspond à une approximation P_2 sur le maillage 2,
- la configuration 3 correspond à une approximation P_3 sur le maillage 1,
- la configuration 4 correspond à une approximation P_3 sur le maillage 2,
- la configuration 5 correspond à une approximation P_2 sur le maillage 3,
- la configuration 6 correspond à une approximation P_3 sur le maillage 3.

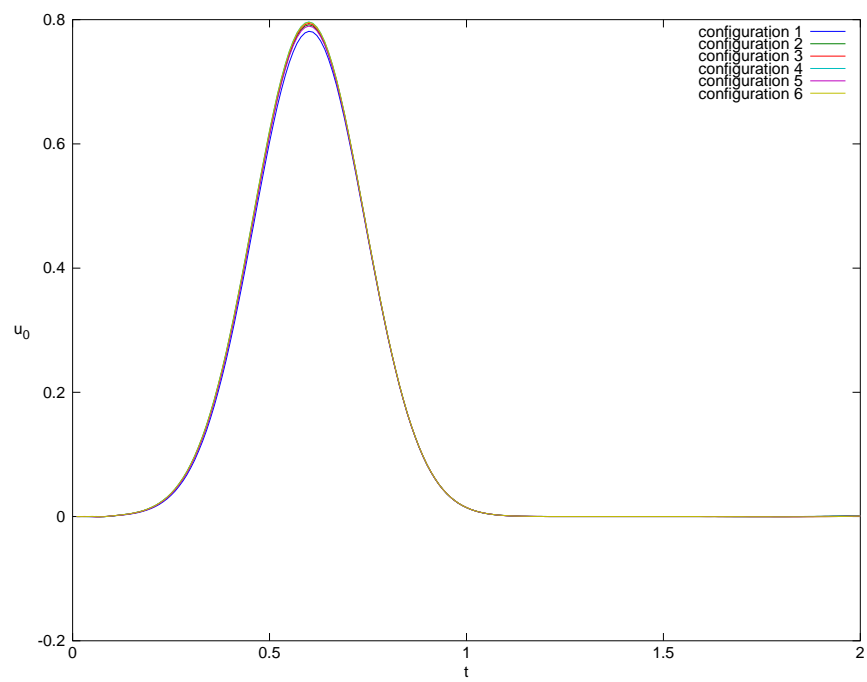
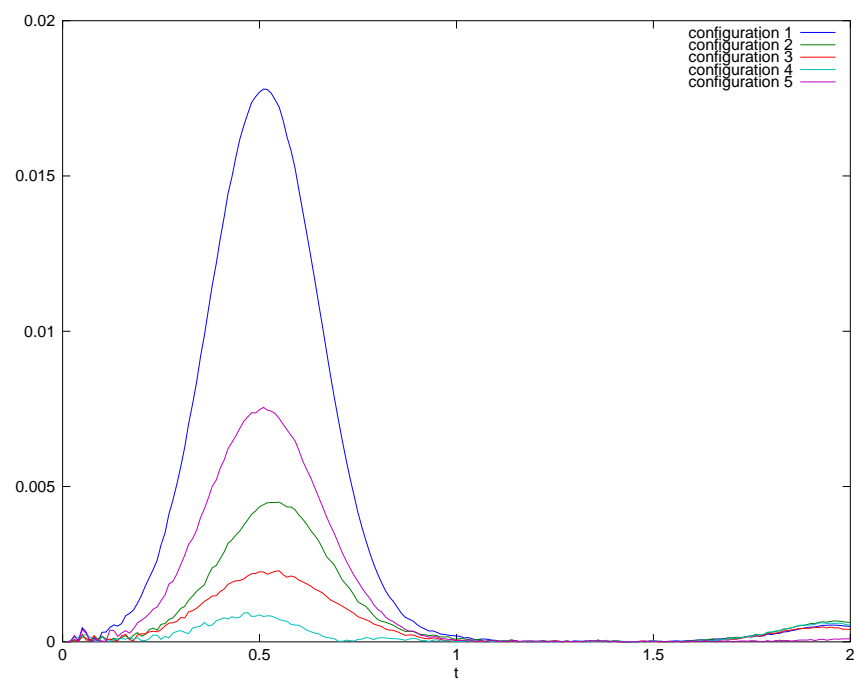
Nous pouvons nous référer au tableau 6.1 pour connaître les nombres de degrés de liberté correspondant aux configurations. Afin de vérifier la convergence de la méthode MAE nous comparons

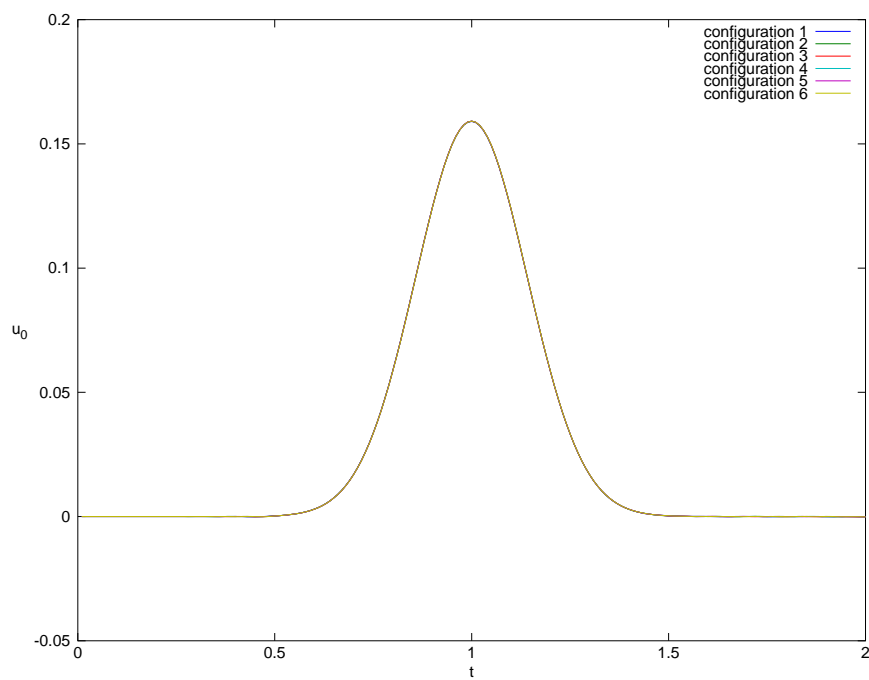
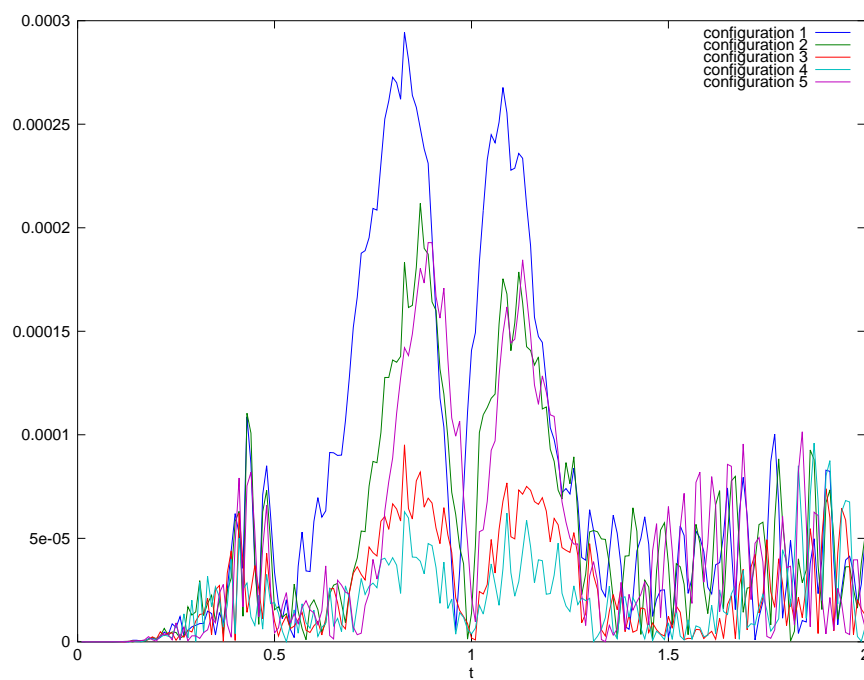
configuration	1	2	3	4	5	6
nombre de ddl	878 170	1 195 260	1 756 340	2 390 520	2 439 790	4 879 580
maillage	1	2	1	2	3	3
ordre	P2	P2	P3	P3	P2	P3

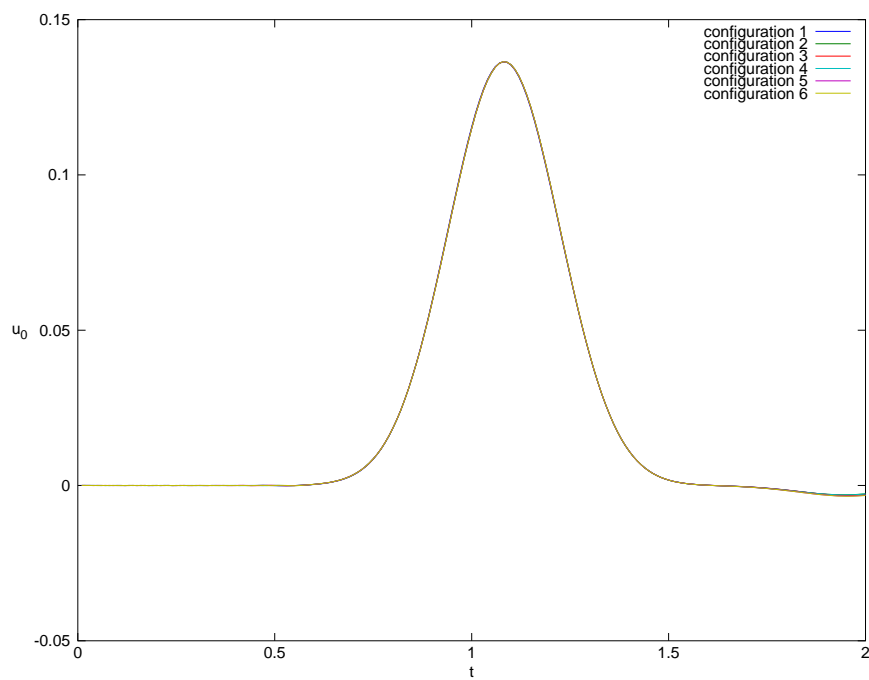
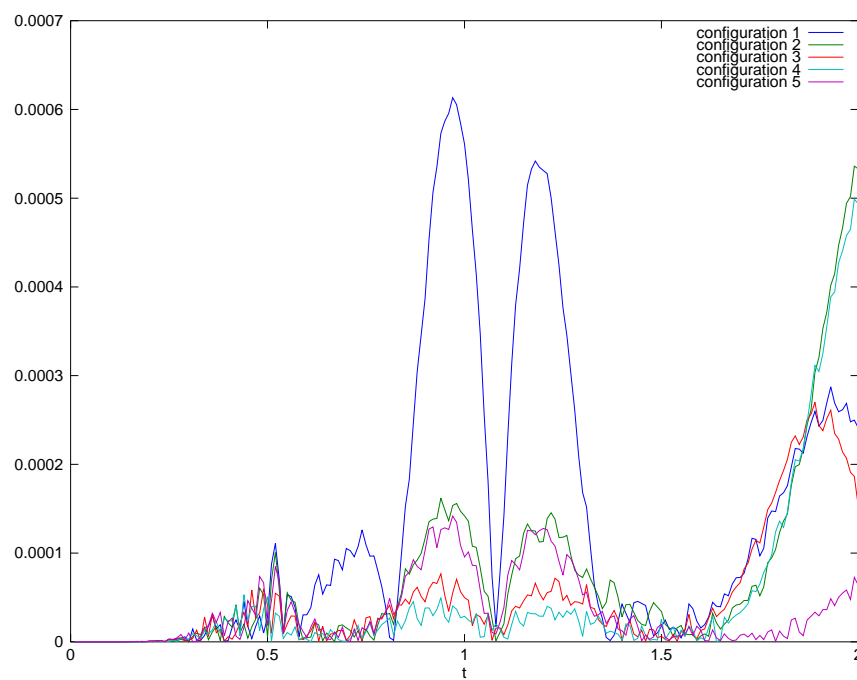
Tableau 6.1 – Nombre de degrés de liberté de chaque configuration

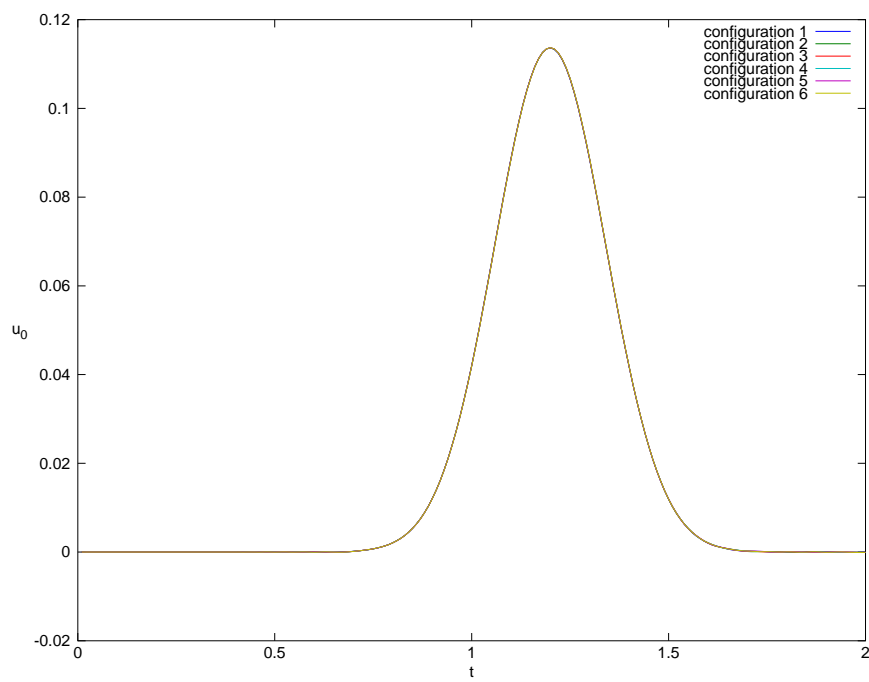
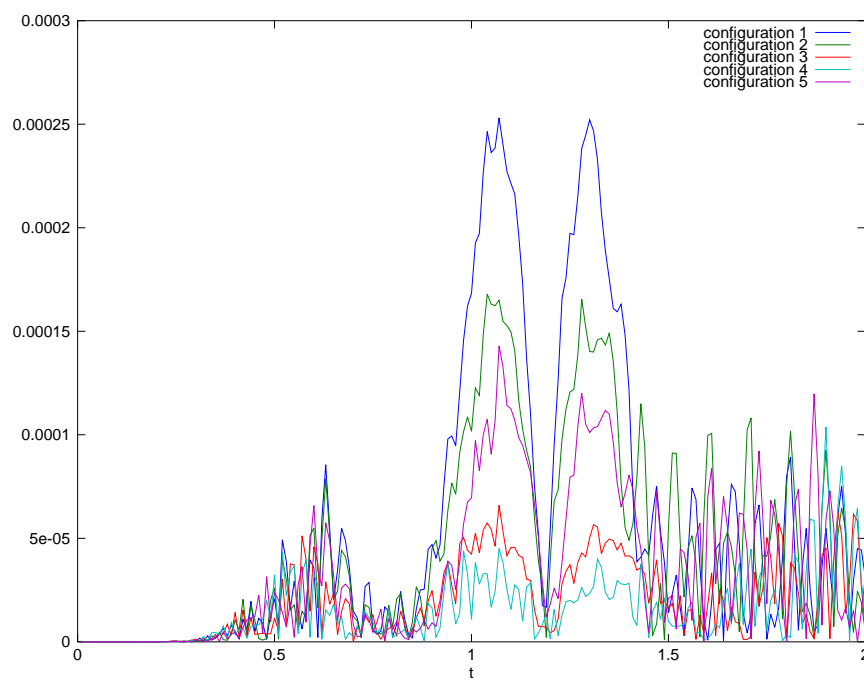
les résultats des différentes configurations entre elles, voir les figures 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, 6.9, 6.10, 6.11, 6.12, 6.13, 6.14, 6.15 et 6.16 pour les six récepteurs. Pour chaque récepteur, nous afficherons les u_0 obtenus dans les six configurations et les erreurs absolues pour les cinq premières configurations, la dernière étant prise comme référence.

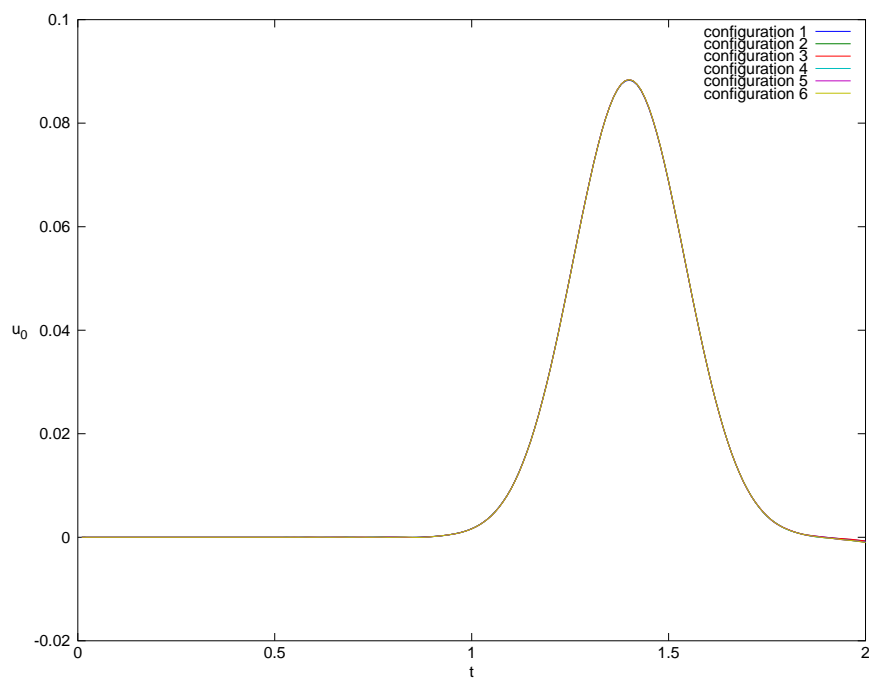
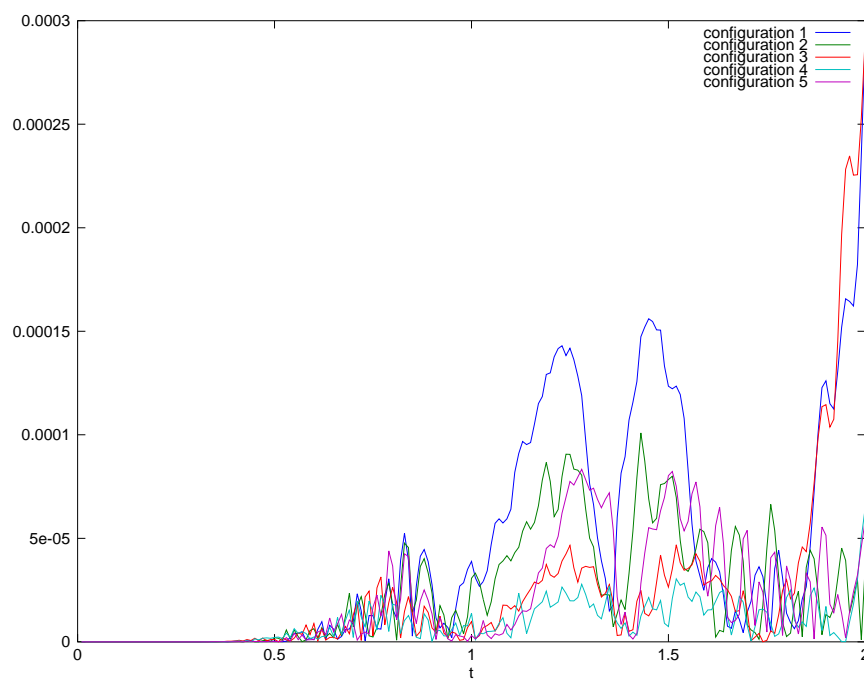
FIGURE 6.5 – Solution u_0 au récepteur R_1 FIGURE 6.6 – Erreur absolue au récepteur R_1

FIGURE 6.7 – Solution u_0 au récepteur R_2 FIGURE 6.8 – Erreur absolue au récepteur R_2

FIGURE 6.9 – Solution u_0 au récepteur R_3 FIGURE 6.10 – Erreur absolue au récepteur R_3

FIGURE 6.11 – Solution u_0 au récepteur R_4 FIGURE 6.12 – Erreur absolue au récepteur R_4

FIGURE 6.13 – Solution u_0 au récepteur R_5 FIGURE 6.14 – Erreur absolue au récepteur R_5

FIGURE 6.15 – Solution u_0 au récepteur R_6 FIGURE 6.16 – Erreur absolue au récepteur R_6

Remarque 6.4. *Nous observons que pour les deux premiers récepteurs qui se situent autour de la source, l'erreur est plus importante que pour les autres récepteurs. Ceci est dû au caractère singulier de la solution au voisinage de la source.*

Nous répertorions les temps de calculs nécessaires dans le tableau 6.2. Les temps indiqués sont des temps CPU, c'est donc indicatif. Nous avons effectué les cinq premières configurations sur mon ordinateur portable (8 Go de mémoire vive) et nous avons passé la configuration 6 sur une machine 24 Go. Pour la configuration 6, le temps de calcul est sous-estimé car il a été réalisé sur une machine plus puissante.

configuration	1	2	3	4	5	6
maillage	1	2	1	2	3	3
ordre	P2	P2	P3	P3	P2	P3
temps CPU (en secondes)	603	958	2 519	3 957	2 785	9 917

Tableau 6.2 – Temps d'exécution pour chaque configuration

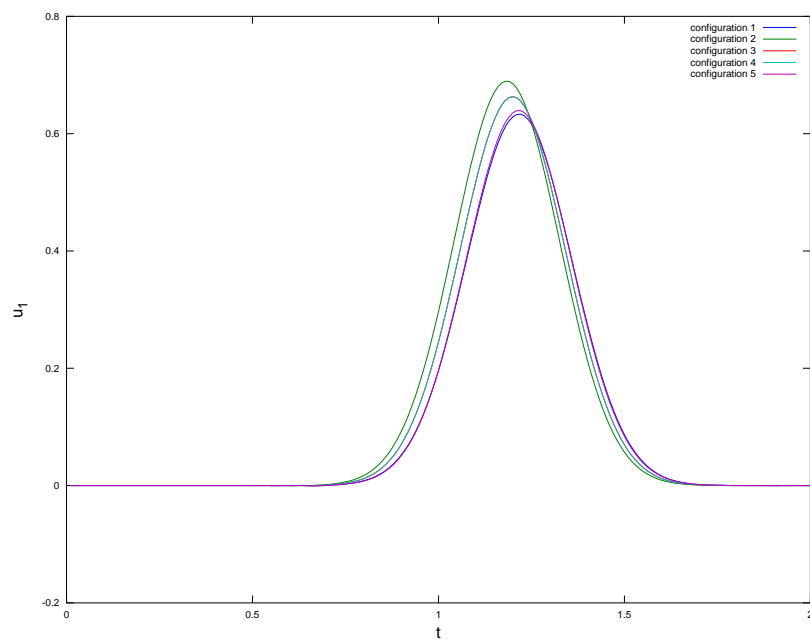
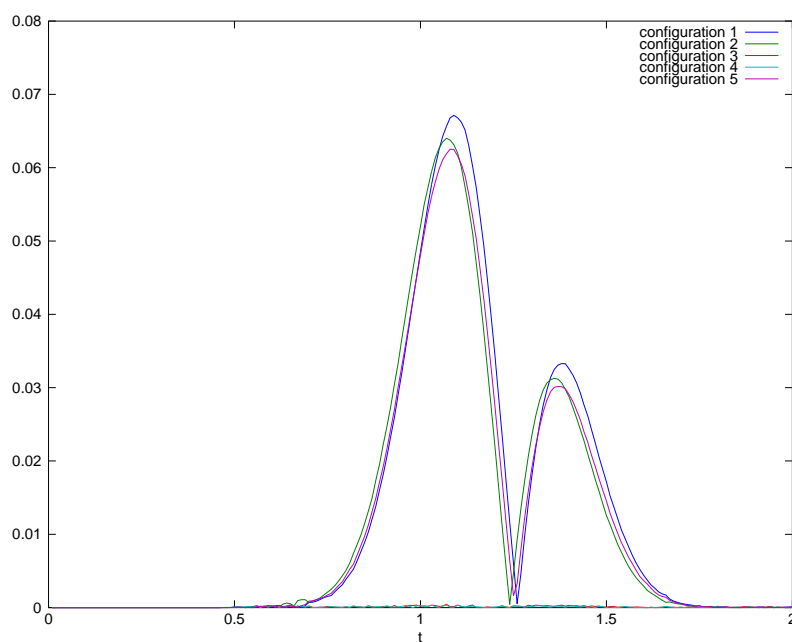
Conclusion

Nous allons faire une liste des conclusions que nous pouvons tirer des expériences.

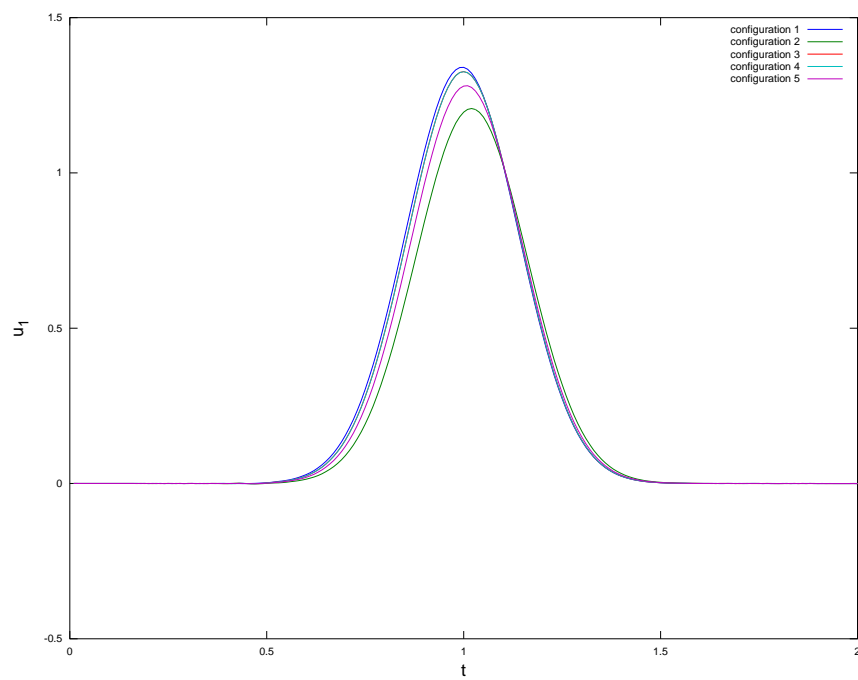
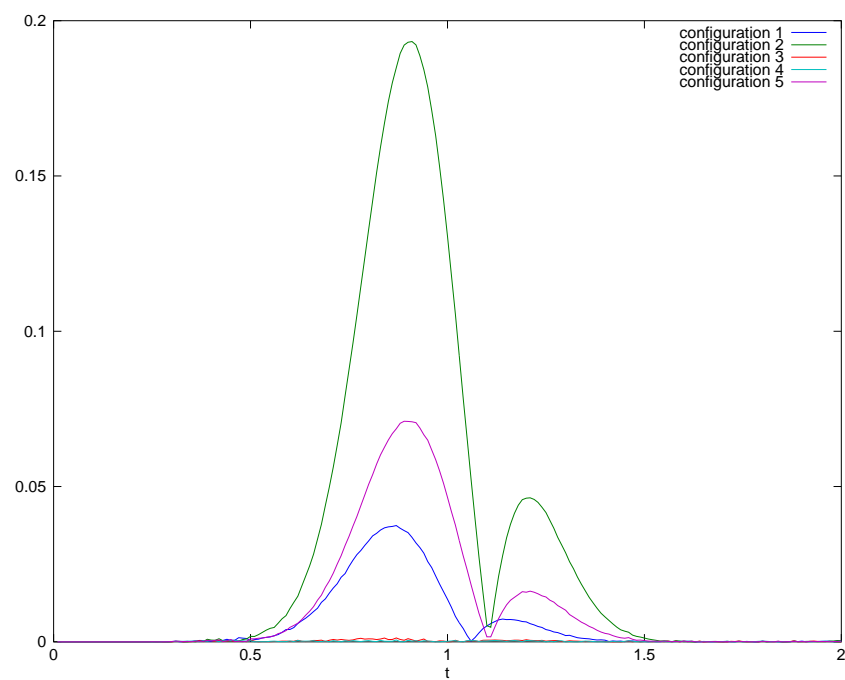
- La première et la plus importante est que la solution u_0 converge en raffinant le maillage et en augmentant l'ordre.
- Nous pouvons ensuite affirmer que l'ordre de la méthode a un impact sur la solution. En effet, en $P2$, sur les 3 maillages, l'erreur autour de la source est plus importante qu'en $P3$. Monter en ordre est donc plus bénéfique que de raffiner car le $P2$ du maillage le plus raffiné est moins bon autour de la source que le $P3$ du maillage le plus grossier. Il ne s'agit pas là de résultats surprenants.
- Si nous nous éloignons de la source, toutes les configurations donnent la même solution.

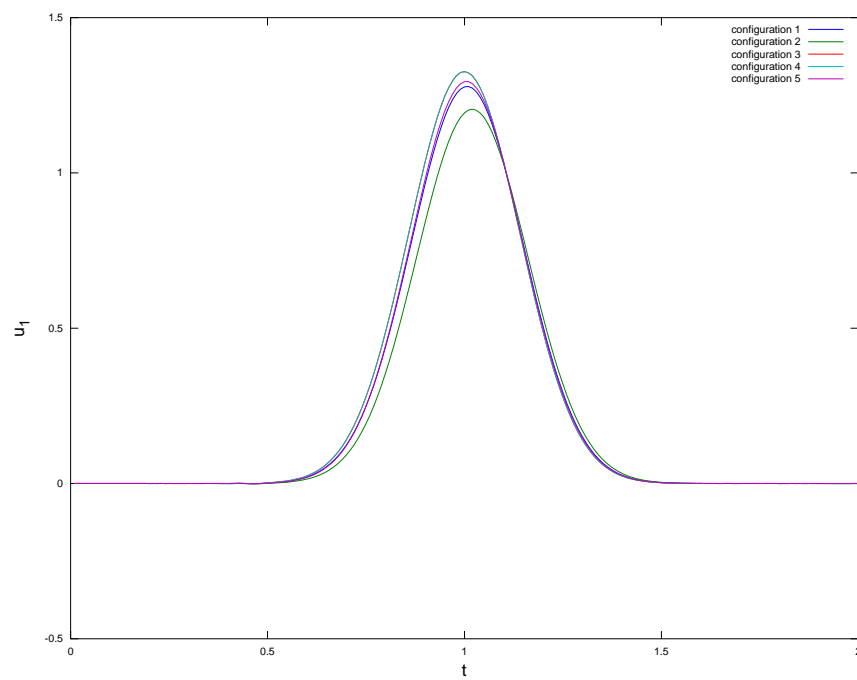
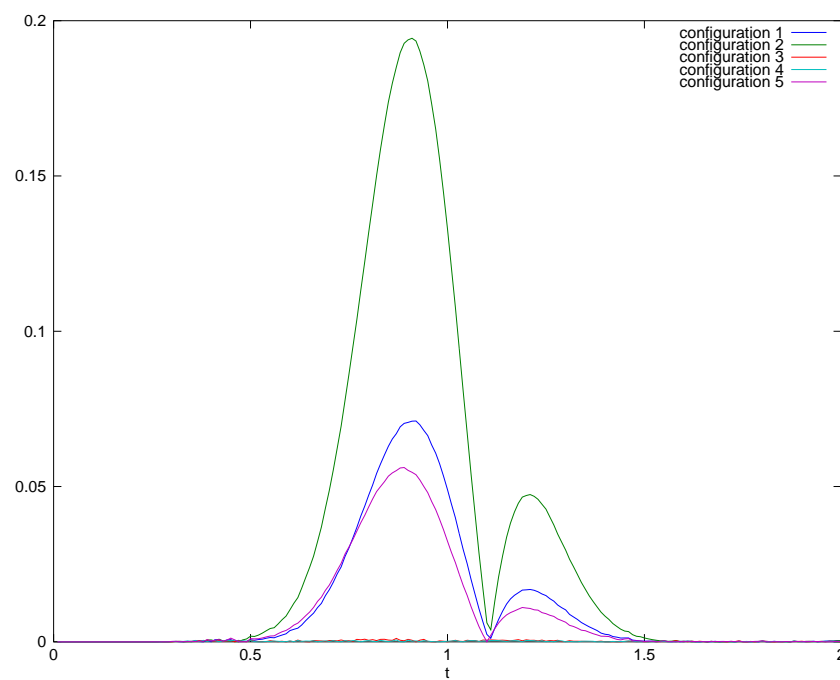
6.3.2 Validation de u_1

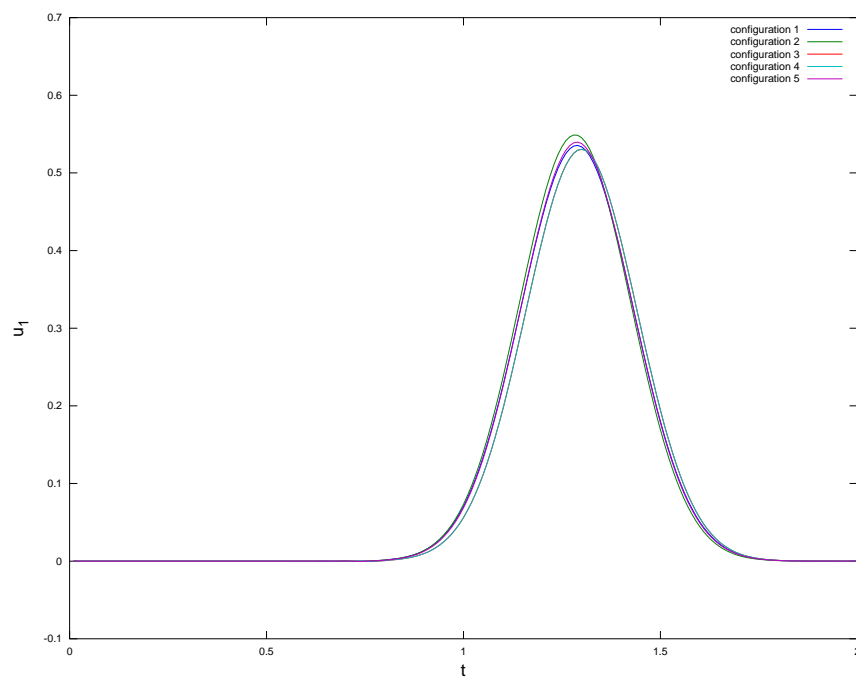
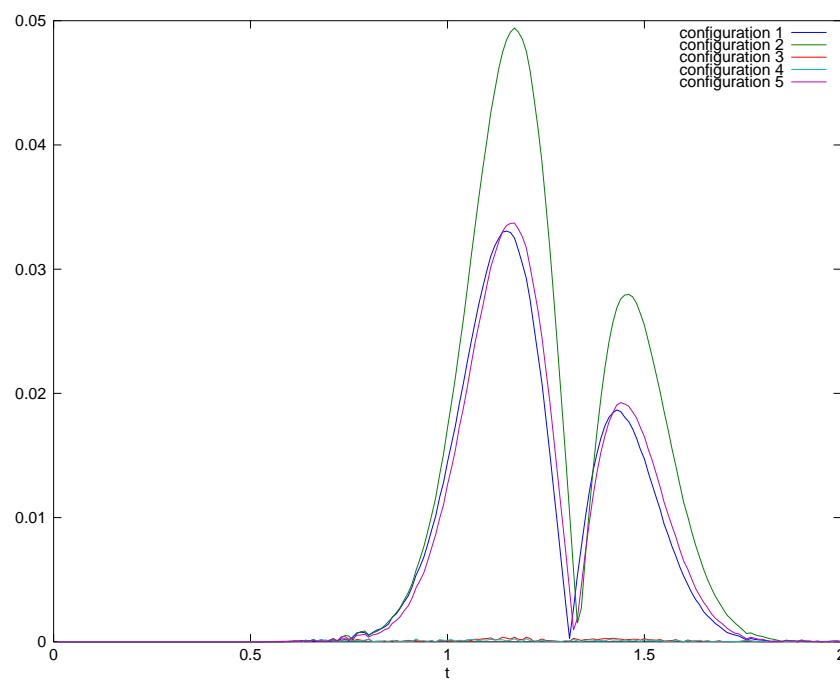
Dans cette section, nous procéderons sensiblement de la même façon que précédemment. Nous allons comparer les cinq premières configurations aux six récepteur décrits dans la section 6.3.1. Pour chaque récepteur, nous afficherons les u_1 obtenus dans les cinq configurations et les erreurs absolue pour les cinq configurations comparée à une solution de référence. Pour le récepteur R_1 , respectivement R_2 , R_3 , R_4 , R_5 , R_6 , nous obtenons les résultats en figure 6.17, 6.18, respectivement en figure 6.19, 6.20, 6.21, 6.22, 6.23, 6.24, 6.25, 6.26, 6.27 et 6.28.

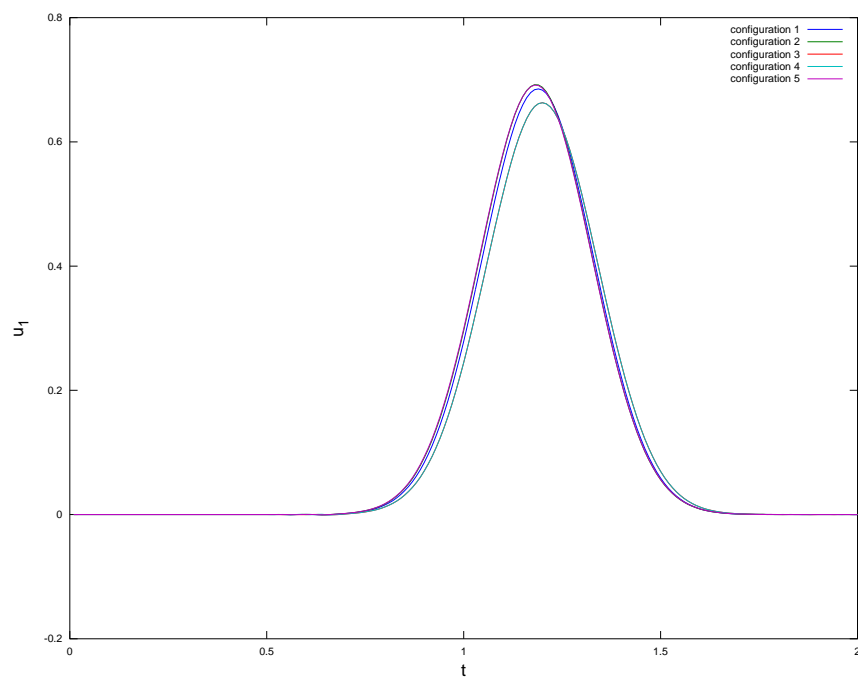
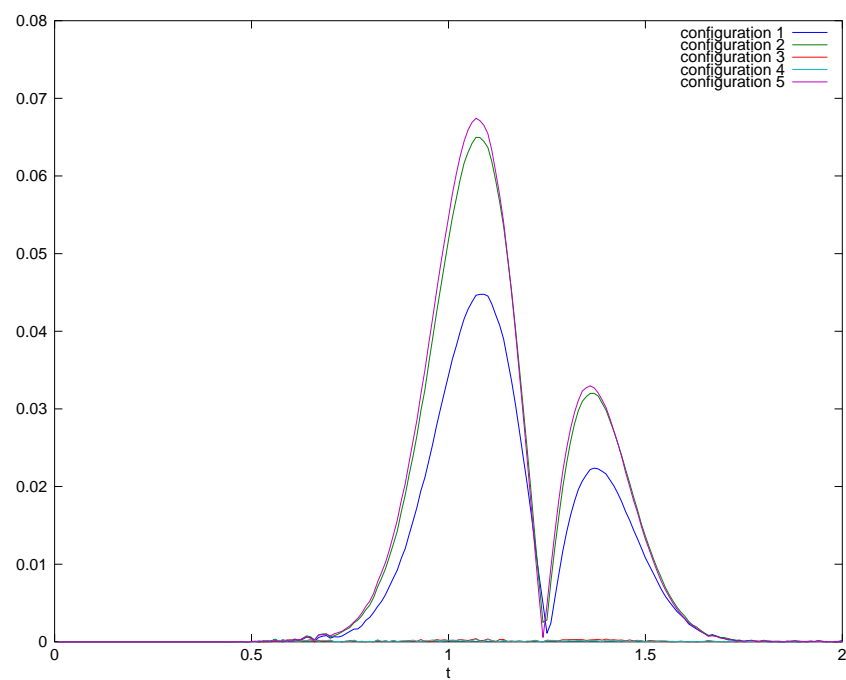
FIGURE 6.17 – Solution u_1 au récepteur R_1 FIGURE 6.18 – Erreur absolue au récepteur R_1

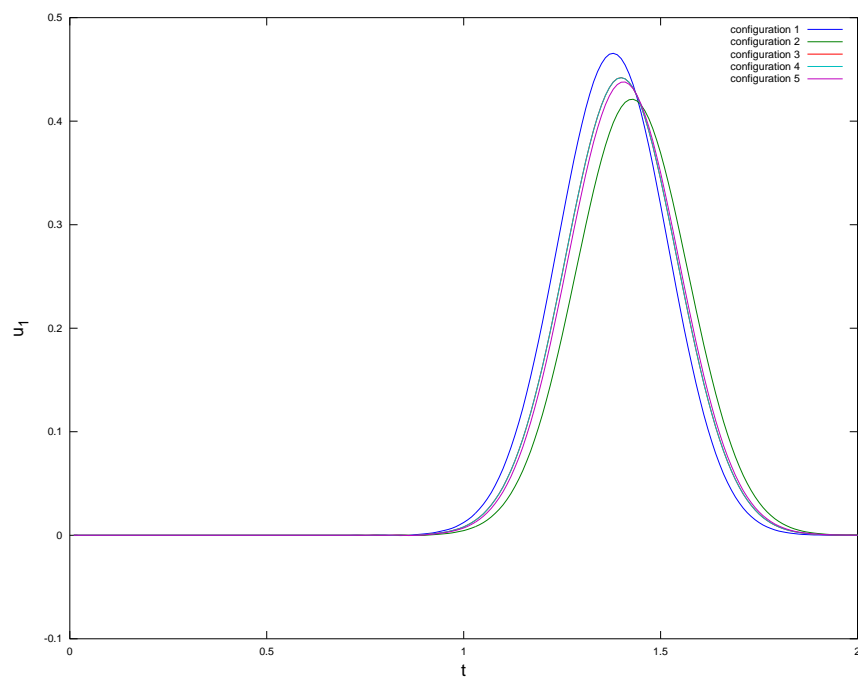
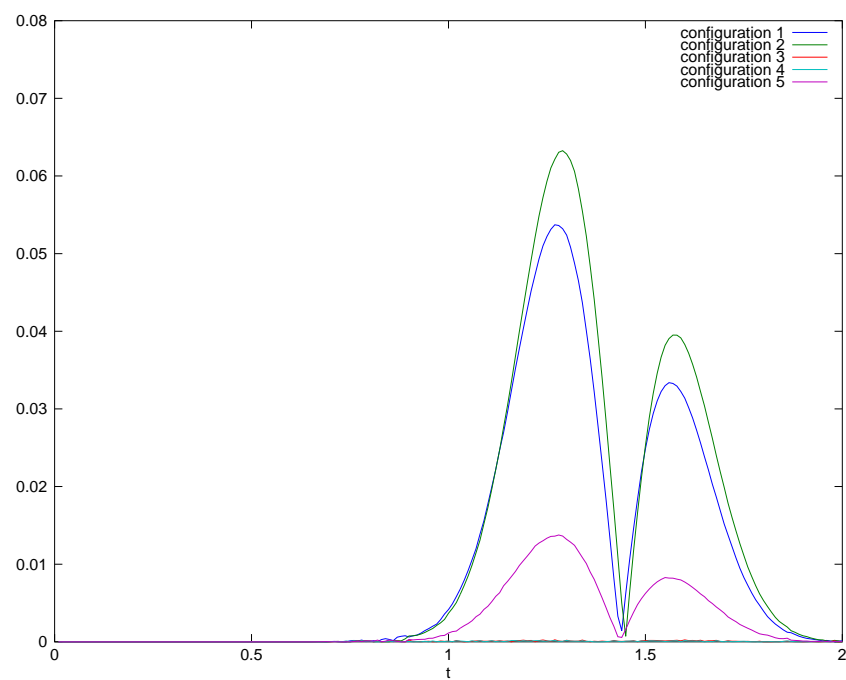
Remarque 6.5. La solution u_1 étant calculée en fonction de u_0 , l'erreur qu'il y avait pour les configurations en P2 va s'accroître, comme nous pouvons le remarquer sur les figures 6.18, 6.20,

FIGURE 6.19 – Solution u_1 au récepteur R_2 FIGURE 6.20 – Erreur absolue au récepteur R_2

FIGURE 6.21 – Solution u_1 au récepteur R_3 FIGURE 6.22 – Erreur absolue au récepteur R_3

FIGURE 6.23 – Solution u_1 au récepteur R_4 FIGURE 6.24 – Erreur absolue au récepteur R_4

FIGURE 6.25 – Solution u_1 au récepteur R_5 FIGURE 6.26 – Erreur absolue au récepteur R_5

FIGURE 6.27 – Solution u_1 au récepteur R_6 FIGURE 6.28 – Erreur absolue au récepteur R_6

6.22, 6.24, 6.26 et 6.28. Il est alors judicieux de retracer les courbes uniquement avec les expériences en P3, par exemple au récepteur R_1 , voir la figure 6.29.

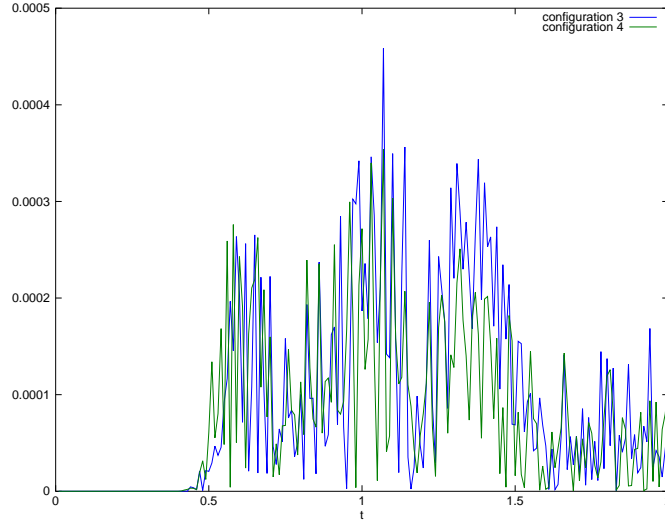


FIGURE 6.29 – Erreur absolue au récepteur R_1 pour les expériences en P3

Remarque 6.6. Rappelons que la fonction u_1 est radiale ce qui signifie que nous avons une symétrie par rapport à l'origine. Nous pouvons vérifier cette symétrie en comparant les résultats des récepteurs R_1 et R_5 par exemple qui doivent être identiques, voir figure 6.30.

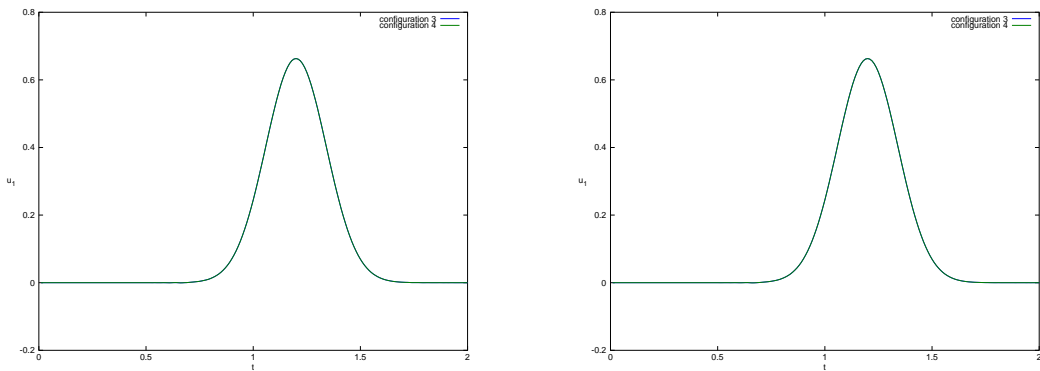


FIGURE 6.30 – Solution u_1 au récepteur R_1 (à droite) et au récepteur R_5 (à gauche)

Conclusion

La convergence de u_1 a bien été vérifiée. L'erreur diminue bien avec le pas de maillage et avec l'augmentation de l'ordre de la méthode. Une partie de l'erreur numérique est due à une mauvaise interpolation de la fonction $\frac{1}{r}$ sur notre espace éléments finis. Afin de limiter cette erreur d'interpolation, nous pouvons évaluer u_1 directement à la position du capteur.

6.3.3 Comparaison avec la méthode Directe

Malheureusement, il n'est pas possible de vérifier la convergence de la méthode directe. Tout raffinement de maillage augmente drastiquement le nombre de degrés de liberté et donc l'espace mémoire. Les plus gros cas réalisés nécessitent déjà 24Go de mémoire vive et chaque fois que nous divisons le pas de maillage par deux, l'espace mémoire nécessaire est multiplié par 8.

La comparaison des simulations directes avec celles obtenues avec la méthode par source ponctuelle est simplement indicative bien que donnant des résultats satisfaisants. Nous comparons pour chacun des six capteurs la solution directe u_ε^d et la solution MAE à l'ordre 0, 1, 2 et l'ordre 2 modifié. Pour se faire, nous traçons les erreurs suivantes

erreur ordre 0

$$e_0^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = u_\varepsilon^d(\mathbf{x}, t) - u_{\varepsilon,0}(\mathbf{x}, t), \quad (6.33)$$

erreur ordre 1

$$e_1^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = u_\varepsilon^d(\mathbf{x}, t) - u_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}, t), \quad (6.34)$$

erreur ordre 2

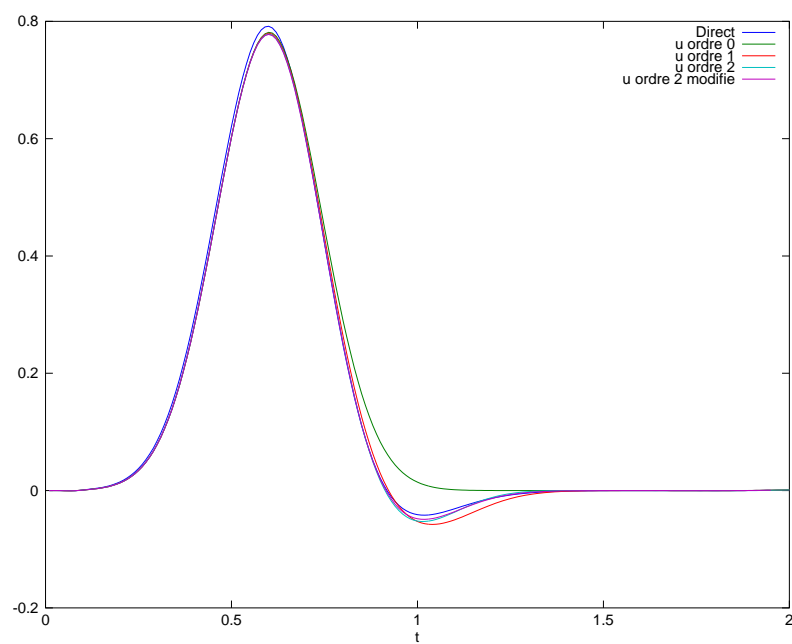
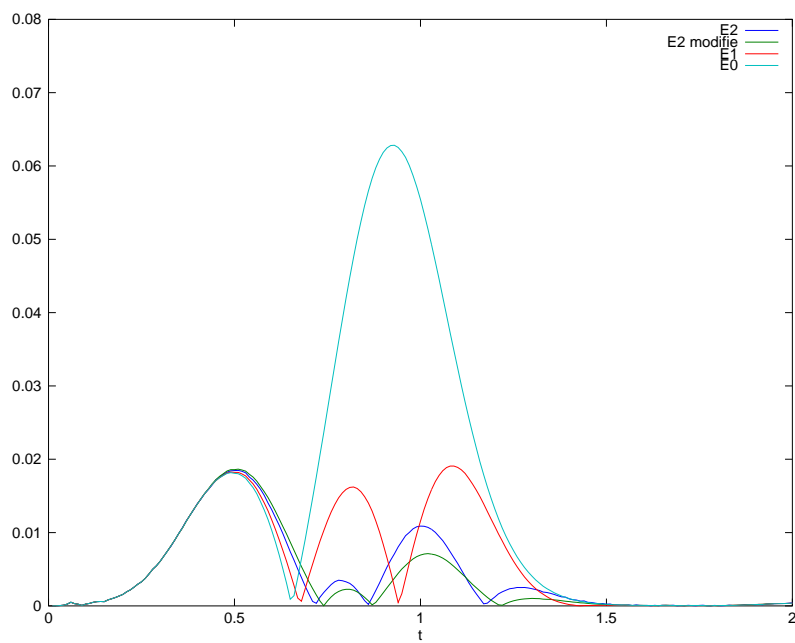
$$e_2^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = u_\varepsilon^d(\mathbf{x}, t) - u_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}, t), \quad (6.35)$$

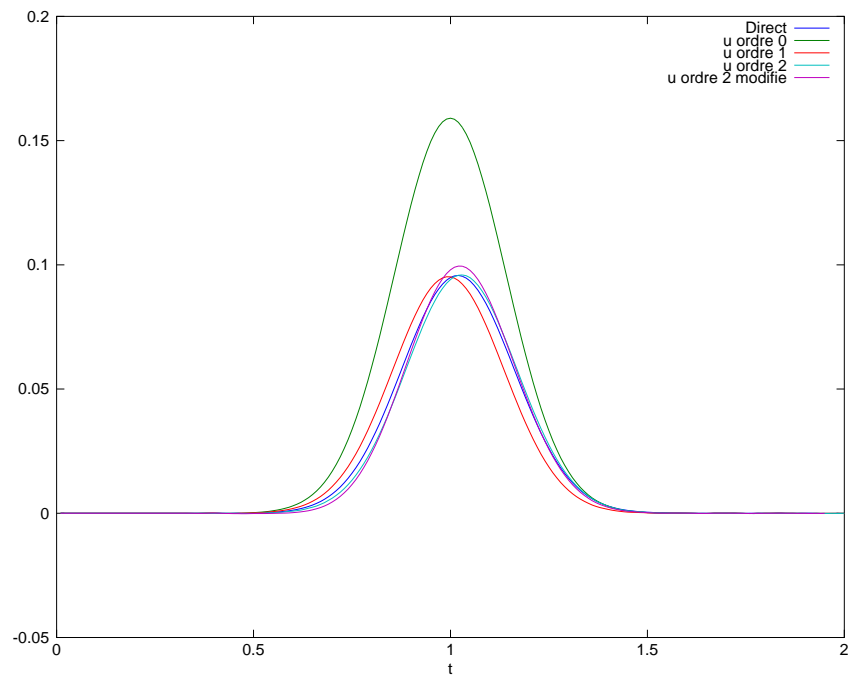
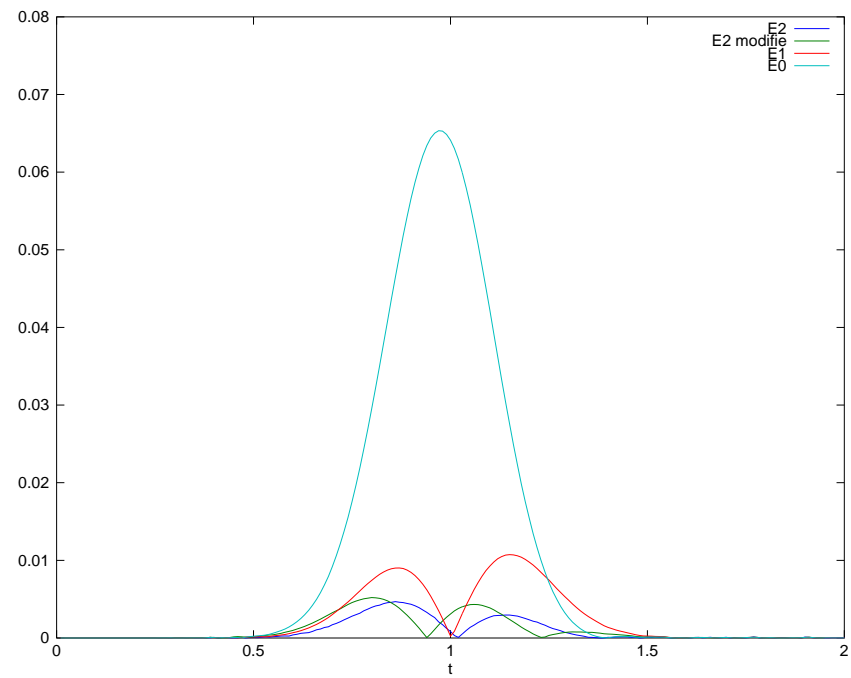
erreur ordre 2 modifié

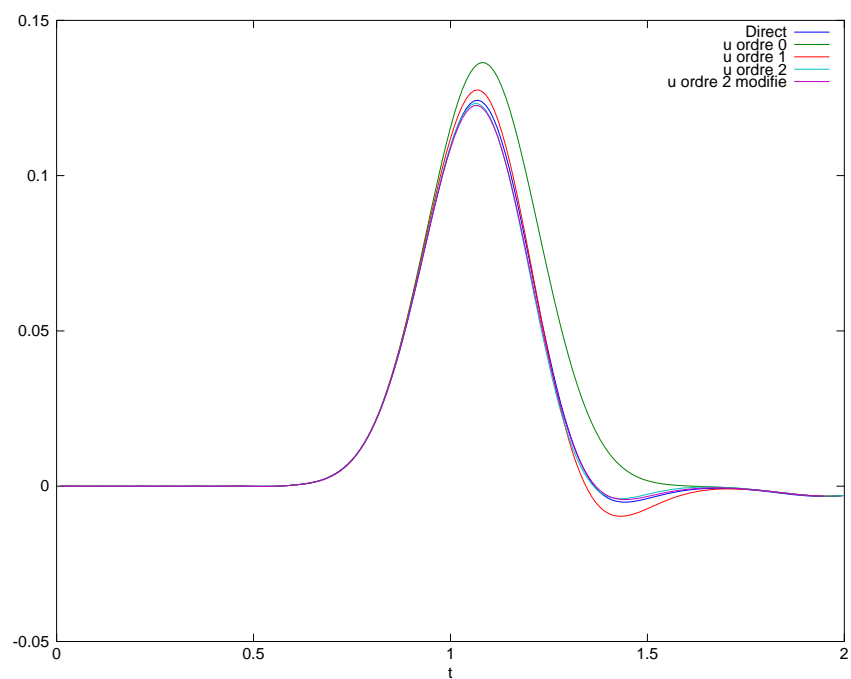
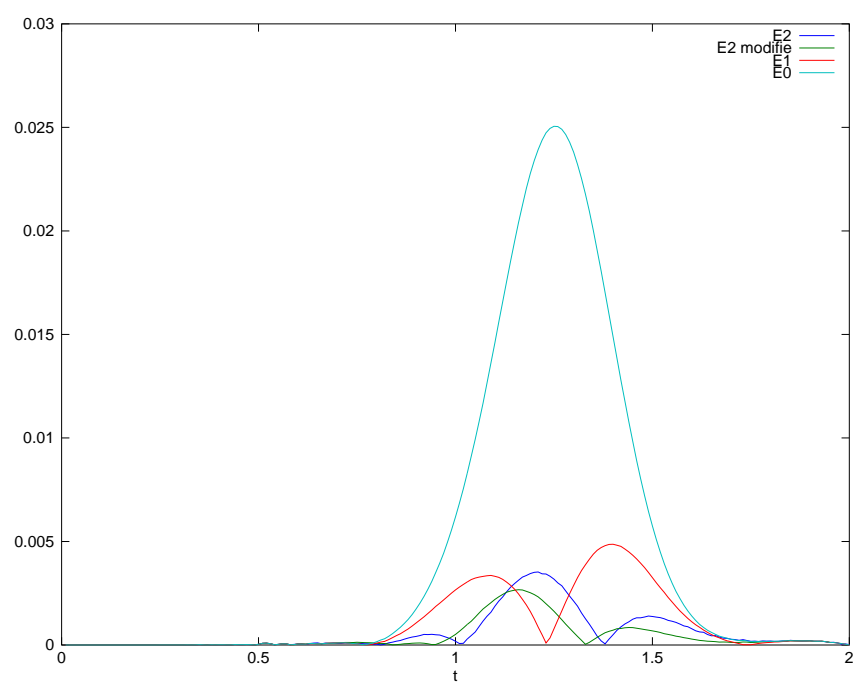
$$e_{2,m}^\varepsilon(\mathbf{x}, t) = u_\varepsilon^d(\mathbf{x}, t) - u_{\varepsilon,2}^m(\mathbf{x}, t). \quad (6.36)$$

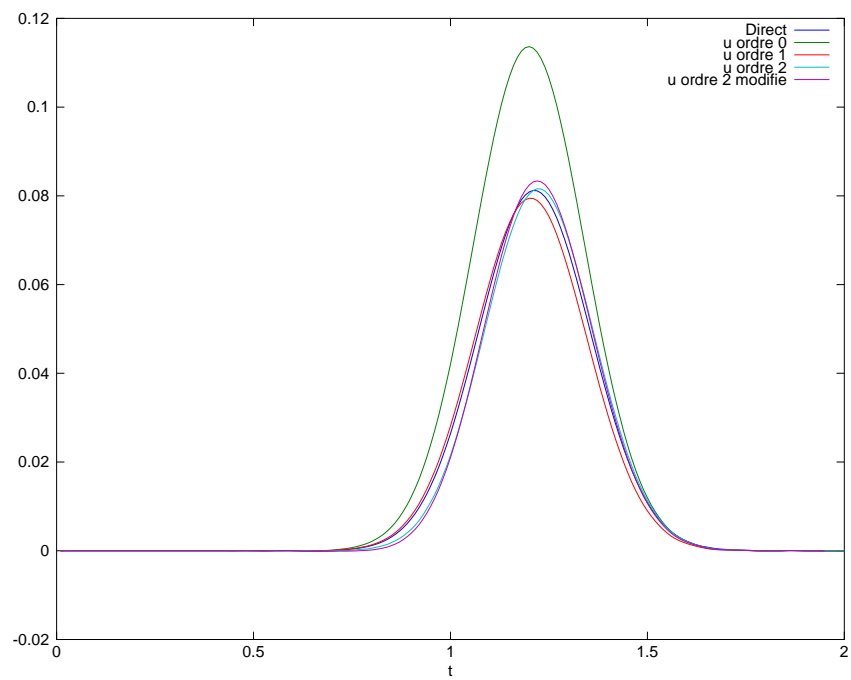
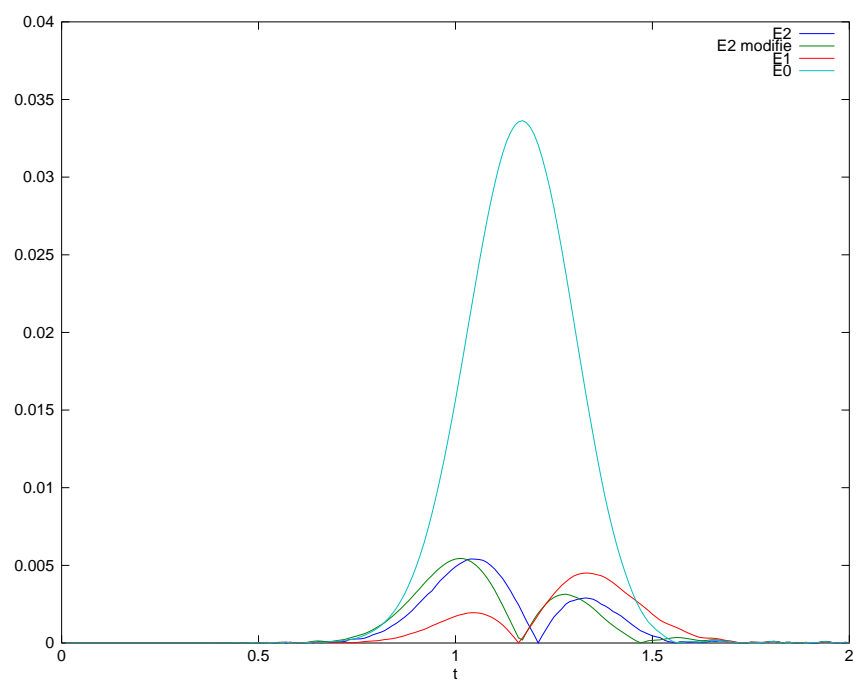
Nous allons nous placer dans les configuration 1 (qui correspond au maillage le moins raffiné en P2) et 4 (qui correspond au maillage intermédiaire en P3) et nous ne considérerons que les récepteurs R_2 , R_3 , R_4 et R_5 .

Commençons par la **configuration 1**. Nous allons à chaque récepteur comparer la solution directe avec l'approximation d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié de la méthode MAE dans une figure, puis dans une autre figure les erreurs e_0^ε , e_1^ε , e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$. Ces résultats sont collectés dans les figures 6.31, 6.32, 6.33, 6.34, 6.35, 6.36, 6.37 et 6.38.

FIGURE 6.31 – Solution directe et solutions MAE d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié au récepteur R_2 FIGURE 6.32 – Erreurs e_0^ε , e_1^ε , e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$ au récepteur R_2

FIGURE 6.33 – Solution directe et solutions MAE d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié au récepteur R_3 FIGURE 6.34 – Erreur e_0^ε , e_1^ε , e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$ au récepteur R_3

FIGURE 6.35 – Solution directe et solutions MAE d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié au récepteur R_4 FIGURE 6.36 – Erreur e_0^ε , e_1^ε , e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$ au récepteur R_4

FIGURE 6.37 – Solution directe et solutions MAE d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié au récepteur R_5 FIGURE 6.38 – Erreur e_0^ε , e_1^ε , e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$ au récepteur R_5

Interprétation des résultats pour la configuration 1

Pour cette configuration où les termes du développement asymptotique ne sont pas calculés avec une très grande précision, nous observons que les modèles d'ordre 2 apportent qu'une amélioration relative par rapport aux modèles d'ordre 1. Par contre, il est clair que ces développements sont plus précis que le modèle d'ordre 0.

Passons à la **configuration 4**. Les résultats sont collectés dans les figures 6.39, 6.40, 6.41, 6.42, 6.43, 6.44, 6.45 et 6.46.

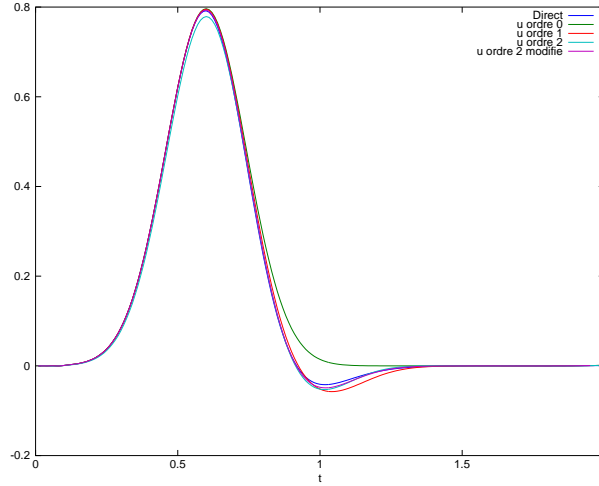


FIGURE 6.39 – Solution directe et solutions MAE d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié au récepteur R_2

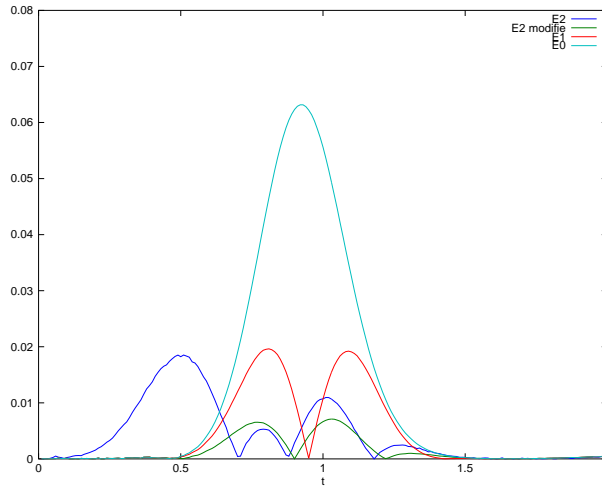
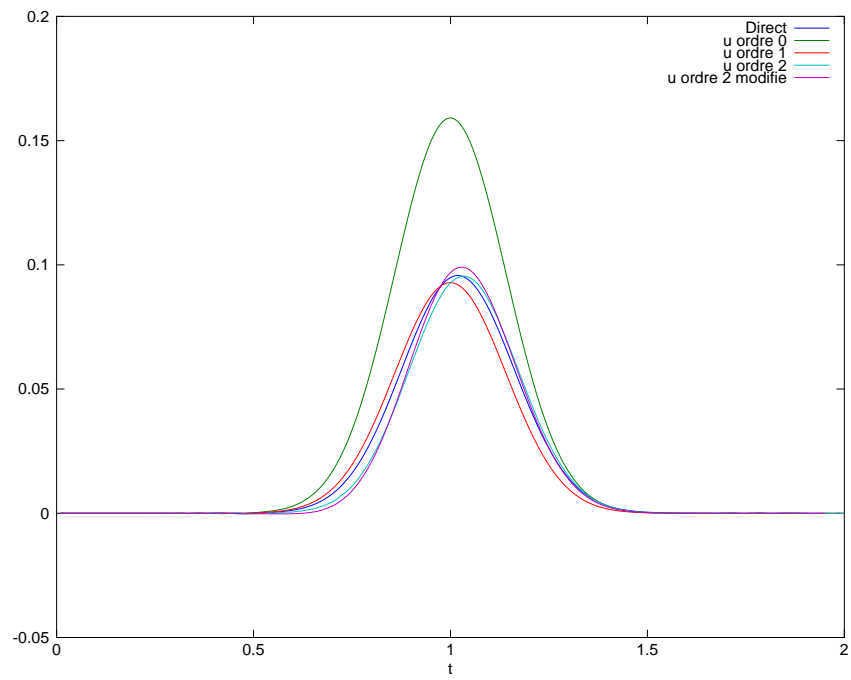
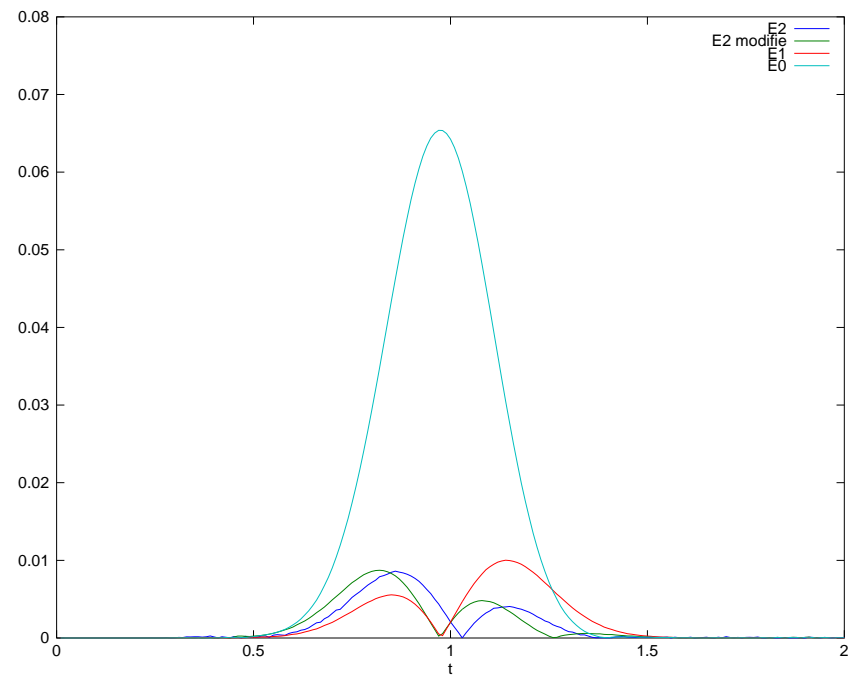
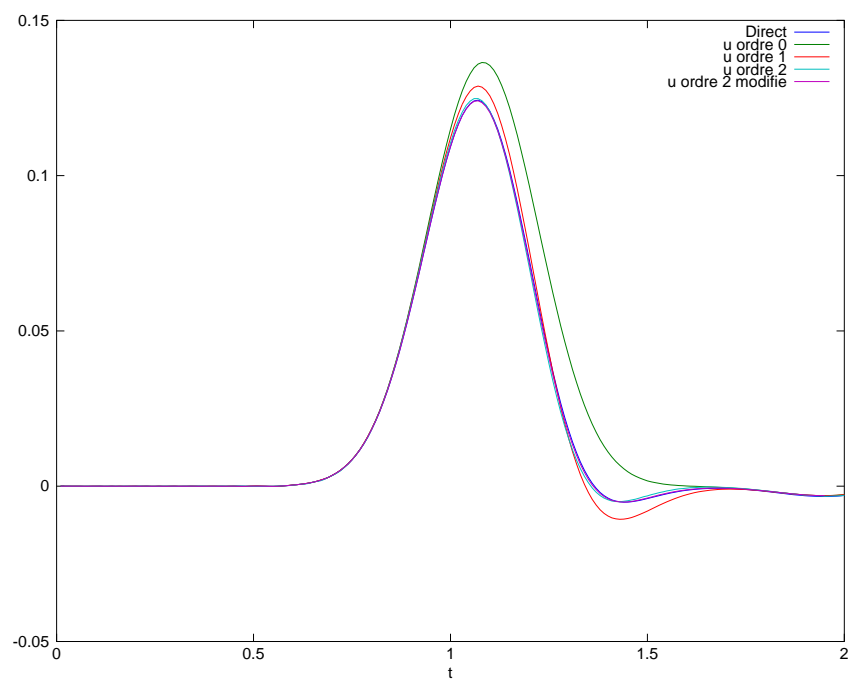
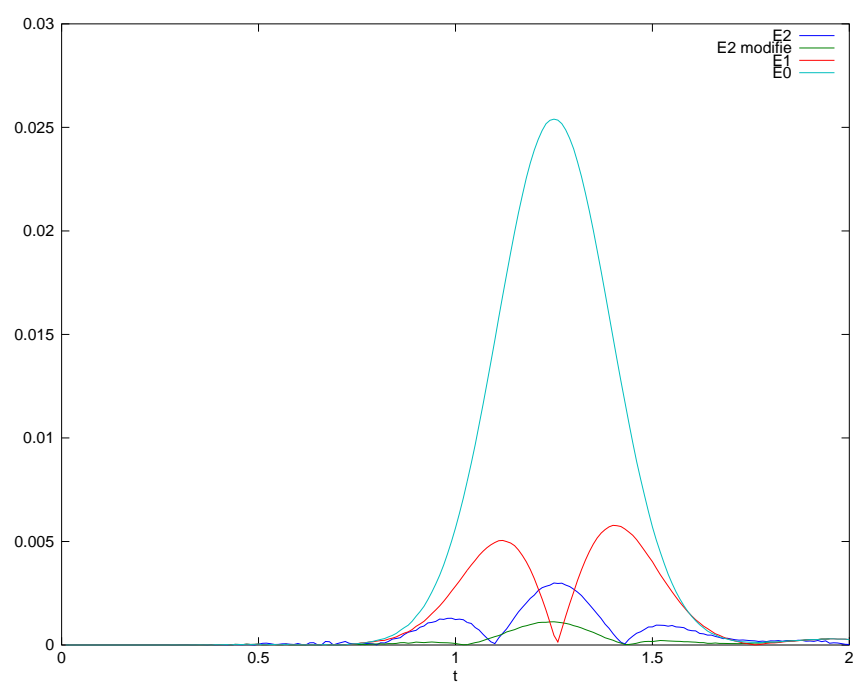
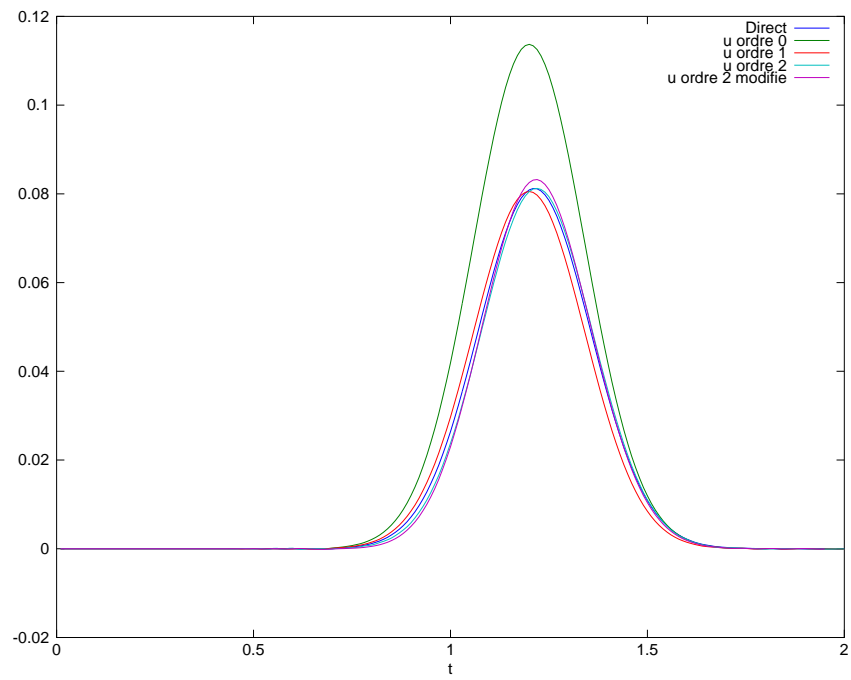
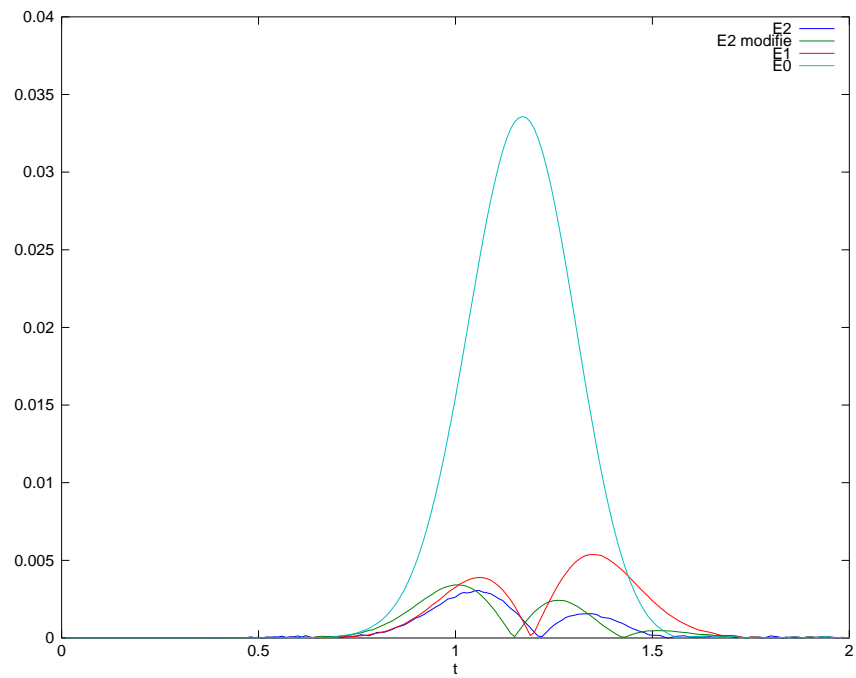


FIGURE 6.40 – Erreurs e_0^ε , e_1^ε , e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$ au récepteur R_2

FIGURE 6.41 – Solution directe et solutions MAE d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié au récepteur R_3 FIGURE 6.42 – Erreur e_0^ε , e_1^ε , e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$ au récepteur R_3

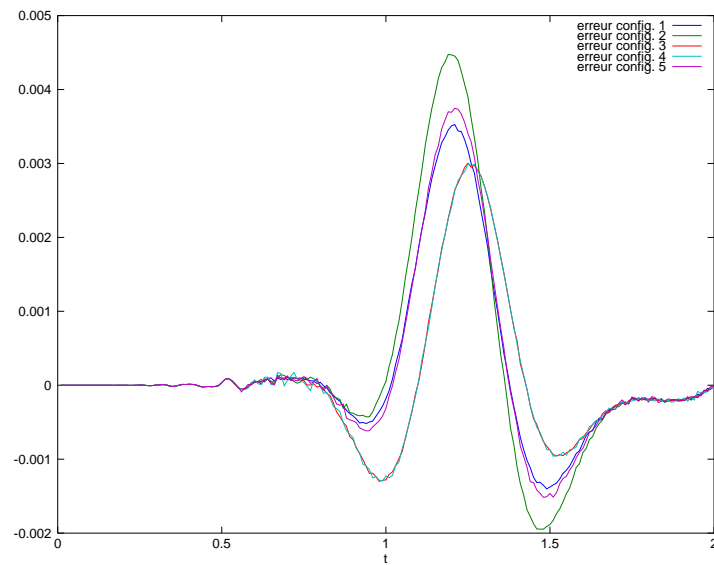
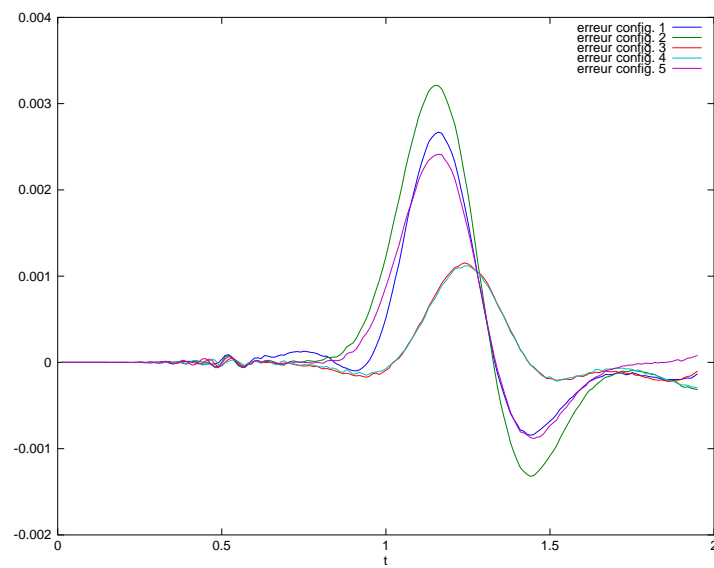
FIGURE 6.43 – Solution directe et solutions MAE d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié au récepteur R_4 FIGURE 6.44 – Erreur e_0^ε , e_1^ε , e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$ au récepteur R_4

FIGURE 6.45 – Solution directe et solutions MAE d'ordre 0, 1, 2 et 2 modifié au récepteur R_5 FIGURE 6.46 – Erreur e_0^ε , e_1^ε , e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$ au récepteur R_5

Interprétation des résultats pour la configuration 4

Nous observons que l'erreur commise par le modèle d'ordre 2 est bien inférieure à l'erreur commise pour le modèle d'ordre 1 qui est elle même inférieure à l'erreur commise pour le modèle d'ordre 0.

Maintenant, nous nous plaçons au récepteur R_4 et nous allons comparer e_2^ε et $e_{2,m}^\varepsilon$ pour les cinq configurations entre-elles. Nous obtenons les figures 6.47 et 6.48.

FIGURE 6.47 – Erreur e_2^ε au récepteur R_4 FIGURE 6.48 – Erreur $e_{2,m}^\varepsilon$ au récepteur R_4

Interprétation des figures 6.47 et 6.48

Les figures 6.47 et 6.48 ont pour objectif d'illustrer la qualité de l'approximation numérique en fonction du modèle. Nous observons que pour les configurations 3 et 4 qui correspondent à des éléments finis P3, que l'erreur commise est bien inférieure que celle des configurations P2. Nous remarquons également que l'approximation de la solution d'ordre 2 modifiée est à privilégier par rapport à l'approximation de la solution d'ordre 2.

Conclusion

Ce chapitre nous permet de valider numériquement la méthode des développements asymptotiques raccordés. Il permet également de mettre en évidence les avantages de cette méthode que nous rappelons ici :

- gain du temps de calcul ;
- facilité pour le maillage ;
- bonne solution sur un maillage grossièrement maillé, ce qui implique moins de limitations dues au stockage mémoire ;
- possibilité de vérifier la convergence de la solution.

Chapitre 7

Méthode de raffinement espace-temps

Dans ce chapitre, nous allons présenter à la fois de façon théorique et pratique la méthode de raffinement espace-temps. Nous verrons que c'est une autre voie pour répondre à notre problématique et pour diminuer le temps de calcul.

7.1 Contexte d'étude pour les pas de temps locaux

Nous nous trouvons exactement dans la même configuration que lors de la résolution directe à l'aide de la méthode de Galerkin Discontinue, voir la section 5.1. Rappelons le problème considéré

$$\mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} U_h + c \frac{d}{dt} B U_h + c^2 \mathcal{K} U_h = -\mathcal{F}. \quad (7.1)$$

7.2 Pas de temps locaux : Motivations

7.2.1 Pourquoi appliquer la méthode des pas de temps locaux ?

Le traitement des milieux fortement hétérogènes (cette hétérogénéité peut être relative aux coefficients physiques ou due à des mailles de taille très différentes) peut être fait de deux manières différentes :

- des schémas implicites-explicites qui permettent d'utiliser des pas de temps homogènes,
- des schémas explicites par raffinement espace-temps.

C'est cette deuxième approche que nous adoptons ici. Les méthodes de Galerkin Discontinues permettent d'utiliser des maillages irréguliers. Par irrégulier nous voulons dire que le pas de discrétisation dépend de l'élément sur lequel nous nous trouvons, voir la figure 7.1. Dans la cadre de notre problème, ceci nous permet d'utiliser des petites mailles proches de l'obstacle et des grandes mailles loin de l'obstacle. Cette technique de raffinement en espace permet de respecter l'ensemble des longueurs caractéristiques. D'une part, le fait de considérer de grands éléments loin de l'obstacle a pour effet de diminuer le nombre de degrés de liberté (par rapport à un maillage homogène). D'autre part, la présence de petits éléments contraint fortement le pas de temps. En effet, rappelons la condition CFL (condition de Courant, Friedrichs et Lewy)

$$dt < \alpha \min_{K \in \mathcal{T}_h} (dx), \quad (7.2)$$

avec dt le pas de temps, dx le diamètre de la sphère circonscrite de l'élément K , \mathcal{T}_h le maillage considéré et α une constante. Dans le cas d'un maillage avec un raffinement local, voir pour

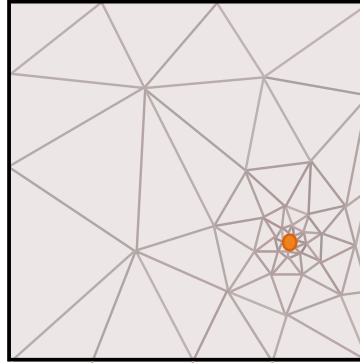


FIGURE 7.1 – Raffinement local

illustration la figure 7.2, nous pouvons facilement noter que dans certaines régions la condition CFL sera très largement satisfaite. Dans ces zones, ceci a pour effet d’augmenter inutilement le

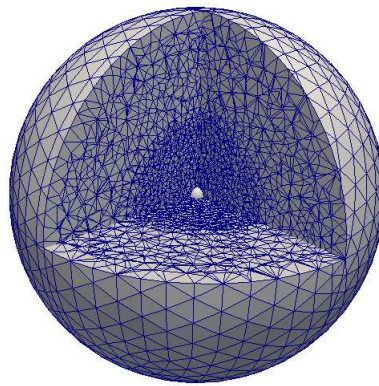


FIGURE 7.2 – Raffinement local 3D

coût de calcul. De plus, pour éviter des phénomènes de dispersion numérique, il vaut mieux que la relation (7.2) soit vérifiée localement. Plus précisément, il est souhaitable du point de vue de la dispersion numérique que $dt \simeq \alpha dx$ sur chaque élément. Dans le cas contraire, la vitesse de l’onde dans certains éléments est mal approchée. Les méthodes de raffinement ont pour vocation de proposer une solution à cette problématique.

7.3 Mise en œuvre de la méthode des pas de temps locaux

Dans cette section, nous présentons une adaptation d’un schéma proposé par de Julien Diaz et Markus Grote, voir [19].

7.3.1 Introduction

La méthode des pas de temps locaux consiste à séparer le domaine en n sous-domaines et à définir dans chaque zone un pas de temps qui lui est propre. Nous expliquons dans le cadre de cette thèse le cas pour deux sous-domaines, un que nous nommerons zone raffinée (en rouge) et l’autre zone grossière (en bleu), voir la figure 7.3.

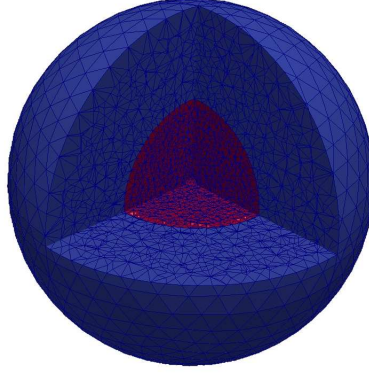


FIGURE 7.3 – Zone raffinée et grossière

Une fois que nous avons partagé notre domaine, nous définissons un pas de temps vérifiant la condition CFL dans chaque zone. Nous aurons alors autant de pas de temps que de sous-domaines.

Définition 7.1. Dans le cas particulier de deux sous-domaines, notons Δt le pas de temps associé à la zone grossièrement maillée et δt celui de la zone finement maillée. Les deux pas de temps locaux vérifient

$$\begin{cases} \delta t < \alpha \min_{K \in \mathcal{T}_{h,r}} (dx), \\ \Delta t < \alpha \min_{K \in \mathcal{T}_{h,g}} (dx), \\ \Delta t = p \delta t, \end{cases} \quad (7.3)$$

avec p un entier et $\mathcal{T}_{h,r}$, respectivement $\mathcal{T}_{h,g}$, l'ensemble des tétraèdres appartenant à la zone raffinée, respectivement à la zone grossière. Nous avons une partition du maillage

$$\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{h,r} \cup \mathcal{T}_{h,g}. \quad (7.4)$$

Nous pouvons alors décomposer U_h sous la forme

$$U_h = U_h^{[g]} + U_h^{[r]}, \quad (7.5)$$

avec $U_h^{[g]}$, respectivement $U_h^{[r]}$, le vecteur égal à U_h sur $\mathcal{T}_{h,g}$, respectivement sur $\mathcal{T}_{h,r}$ et nul sur $\mathcal{T}_{h,r}$, respectivement sur $\mathcal{T}_{h,g}$.

À présent, définissons un opérateur de projection .

Définition 7.2. Soit P l'opérateur défini par

$$PU_h = U_h^{[r]}. \quad (7.6)$$

Remarque 7.1. L'opérateur P est un opérateur de projection dit opérateur de projection sur la zone raffinée. L'opérateur $I - P$ est donc l'opérateur de projection sur la zone grossière, voir la figure 7.4. Nous avons

$$(I - P)U_h = U_h^{[g]}. \quad (7.7)$$

Remarque 7.2. Nous pouvons écrire notre vecteur solution U_h comme la somme d'un vecteur solution sur la zone raffinée PU_h et d'un vecteur solution sur la zone grossière $(I - P)U_h$. L'opérateur P nous permet de considérer la solution dans chaque domaine.

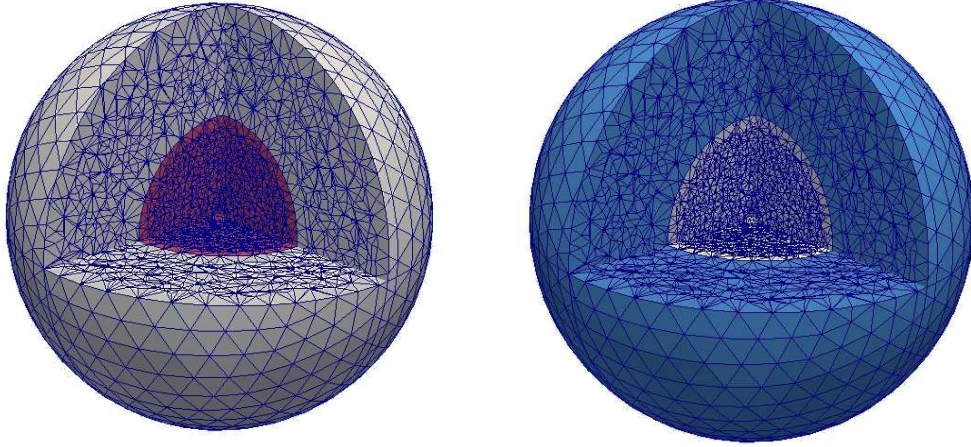


FIGURE 7.4 – Solution sur la zone raffinée (à droite) et sur la zone grossière (à gauche)

Remarque 7.3. La matrice de projection P est diagonale : ces éléments diagonaux sont égaux à 0 en zone grossière et à 1 en zone raffinée.

7.3.2 Méthode de Galerkin Discontinue et pas de temps locaux

Comme nous l'avons dit en introduction, voir 7.2.1, nous utilisons la méthode GD et pour la discrétisation en temps, nous mettons une discrétisation avec des pas de temps locaux. Dans le chapitre 5, nous avons vu que l'équation semi-discrète des ondes considérée s'écrit sous la forme

$$\mathcal{M} \frac{d^2}{dt^2} U_h + c \mathcal{B} \frac{d}{dt} U_h + c^2 \mathcal{K} U_h = -\mathcal{F}, \quad (7.8)$$

où U_h est le vecteur de composantes $u_{h,i}$, \mathcal{M} est la matrice de masse (**diagonale par bloc**), \mathcal{B} est la matrice absorbante (**nulle partout sauf pour des éléments absorbants**), \mathcal{K} est la matrice de rigidité (**symétrique**) et \mathcal{F} est le vecteur source. D'après la définition 7.2, nous avons

$$U_h(t) = P U_h(t) + (I - P) U_h(t) = U_h^{[r]}(t) + U_h^{[g]}(t). \quad (7.9)$$

Puisque nous allons résonner avec des pas de temps différents (Δt et δt), introduisons la notation suivante

$$\tilde{U}(t, \tau) = \frac{U_h(t + \tau) + U_h(t - \tau)}{2}, \quad (7.10)$$

et sa discrétisation

$$\tilde{U}_{n,m} = \tilde{U}(n\Delta t, m\delta t). \quad (7.11)$$

Remarque 7.4. La variable τ appartient à l'intervalle $[0, \Delta t]$, donc si $\Delta t = p \delta t$, alors m est un entier compris entre 0 et p .

En tant que fonction dépendant de τ , \tilde{U} vérifie

$$\begin{cases} \tilde{U}^{[r]}(t, 0) = U_h^{[r]}(t), \\ \partial_\tau \tilde{U}^{[r]}(t, 0) = 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

avec $\tilde{U}_h^{[r]}(t, \tau) := P \tilde{U}_h(t, \tau)$.

Remarque 7.5. *Nous posons quelques hypothèses qui rappellent le contexte d'étude. Premièrement, nous allons supposer que*

$$\mathcal{B}P = P\mathcal{B} = 0, \quad (7.13)$$

car \mathcal{B} est nulle dans la zone raffinée. De même pour la source, nous supposons qu'elle est nulle dans la zone grossière ce qui implique

$$P\mathcal{F} = 0. \quad (7.14)$$

Enfin, puisque la matrice de masse et la matrice absorbante sont diagonales par blocs et P est diagonale, nous avons P et \mathcal{M} ainsi que $(I - P)$ et \mathcal{B} qui commutent ce qui se traduit par

$$P\mathcal{M} = \mathcal{M}P \quad \text{et} \quad (I - P)\mathcal{B} = \mathcal{B}(I - P). \quad (7.15)$$

Nous pouvons maintenant projeter l'équation (7.8) dans chacune des zones.

$$P\left(\mathcal{M}\frac{d^2}{dt^2}U_h + c\mathcal{B}\frac{d}{dt}U_h + c^2\mathcal{K}U_h\right) + (I - P)\left(\mathcal{M}\frac{d^2}{dt^2}U_h + c\mathcal{B}\frac{d}{dt}U_h + c^2\mathcal{K}U_h\right) = -P\mathcal{F} - (I - P)\mathcal{F}. \quad (7.16)$$

En simplifiant à l'aide des hypothèses, il suit

$$\mathcal{M}\frac{d^2}{dt^2}U_h^{[r]} + c^2P\mathcal{K}U_h + \mathcal{M}\frac{d^2}{dt^2}U_h^{[g]} + c\mathcal{B}\frac{d}{dt}U_h^{[g]} + c^2(I - P)\mathcal{K}U_h = -\mathcal{F}. \quad (7.17)$$

Soit encore

$$\begin{cases} \mathcal{M}\frac{d^2}{dt^2}U_h^{[r]} + c^2P\mathcal{K}U_h = 0, \\ \mathcal{M}\frac{d^2}{dt^2}U_h^{[g]} + c\mathcal{B}\frac{d}{dt}U_h^{[g]} + c^2(I - P)\mathcal{K}U_h = -\mathcal{F}, \end{cases} \quad (7.18)$$

la première équation étant dans la zone raffinée et la seconde dans la zone grossière. Nous allons maintenant discrétiser en temps chacune des équations de (7.18) avec le pas de temps correspondant à la zone (Δt ou δt). Commençons par la zone raffinée. Dans cette zone, nous avons défini le pas de temps δt grâce à la condition CFL, voir (7.3). Nous avons également noté $\tilde{U}_{n,m}$ la discrétisation associée à ce pas de temps, voir (7.11). Nous obtenons

$$\mathcal{M}\frac{\tilde{U}_{n,m+1}^{[r]} - 2\tilde{U}_{n,m}^{[r]} + \tilde{U}_{n,m-1}^{[r]}}{\delta t^2} + c^2P\mathcal{K}\tilde{U}_{n,m} = 0, \quad (7.19)$$

avec $\tilde{U}_{n,m}^{[r]} = P\tilde{U}_{n,m}$, $\tilde{U}_{n,m}^{[g]} = \tilde{U}_{n,0}^{[g]}$, $\tilde{U}_{n,0} = U_n$ et $\partial_\tau \tilde{U}(t, 0) = 0$. Ensuite, pour la zone grossièrement maillée, nous avons

$$\mathcal{M}\frac{U_{n+1}^{[g]} - 2U_n^{[g]} + U_{n-1}^{[g]}}{\Delta t^2} + c\mathcal{B}\frac{U_{n+1}^{[g]} - U_{n-1}^{[g]}}{2\Delta t} + c^2(I - P)\mathcal{K}U_n = -\mathcal{F}. \quad (7.20)$$

Maintenant, voyons l'algorithme de cette méthode.

Initialisation :

Au temps $t = 0$, nous avons $U_0 = 0$ et comme le terme source est nul dans la zone raffinée nous avons $\tilde{U}_{0,m} = 0$ pour tout $m \leq p$. Pour le premier pas de temps nous avons simplement à résoudre (7.20) pour $n = 0$ en prenant $U_{-1} = 0$

$$(\mathcal{M} + c\frac{\Delta t}{2}\mathcal{B})U_1^{[g]} = -\Delta t^2\mathcal{F}. \quad (7.21)$$

Remarque 7.6. *L'onde n'a pas eu le temps d'arriver jusqu'à la zone raffinée, c'est pourquoi $U_{0,m}^{[r]} = 0$.*

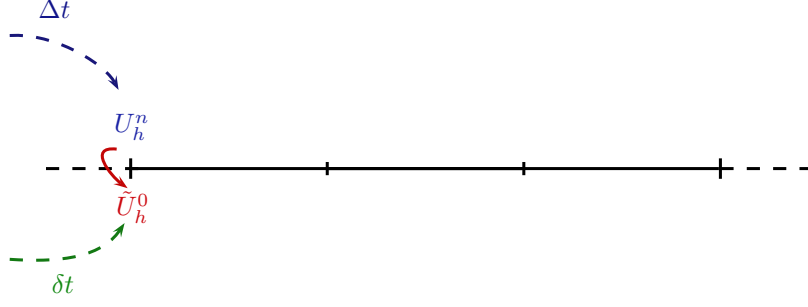


FIGURE 7.5 – Initialisation de la méthode des pas de temps locaux

Au temps $t = n\Delta t$:

Au temps $t = n\Delta t$, nous avons calculé U_n et U_{n-1} . Nous devons alors faire l'initialisation pour la variable de temps τ associée au maillage fin

$$\tilde{U}_{n,0} = U_n, \quad (7.22)$$

voir la figure 7.5. Le premier terme à déterminer est $\tilde{U}_{n,1} = \tilde{U}(n\Delta t, \delta t)$. Pour se faire, nous résolvons (7.19) sur $[0, \delta t]$ en prenant en compte la symétrie de \tilde{U} par rapport à τ , c'est à dire que $\tilde{U}_{n,-1} = \tilde{U}_{n,1}$. Il suit

$$2\mathcal{M}\tilde{U}_{n,1}^{[r]} = 2\mathcal{M}U_n^{[r]} - c^2 \delta t^2 PKU_n. \quad (7.23)$$

Pour les temps suivant, c'est à dire pour $\tau \in [\delta t, \Delta t]$, nous avons d'après (7.19)

$$\mathcal{M}\tilde{U}_{n,m+1}^{[r]} = 2\mathcal{M}\tilde{U}_{n,m}^{[r]} - \mathcal{M}\tilde{U}_{n,m-1}^{[r]} - c^2 \delta t^2 PK\tilde{U}_{n,m}. \quad (7.24)$$

Remarque 7.7. Au temps $t = n\Delta t + m\delta t$ nous avons déjà déterminé $\tilde{U}_{n,m-1}^{[r]}$ et $\tilde{U}_{n,m}^{[r]}$. Une dernière subtilité réside dans le fait que

$$\tilde{U}_{n,m} = \tilde{U}_{n,m}^{[r]} + \tilde{U}_{n,m}^{[g]} = \tilde{U}_{n,m}^{[r]} + U_n^{[g]}. \quad (7.25)$$

Rappelons que $\Delta t = p\delta t$. Nous devons alors effectuer p fois les calculs dans la zone finement maillée pour obtenir $\tilde{U}_{n,p}$, voir la figure 7.6. Ici, nous avons pris l'exemple avec $p = 3$.

Construction de $U_{n+1}^{[r]}$:

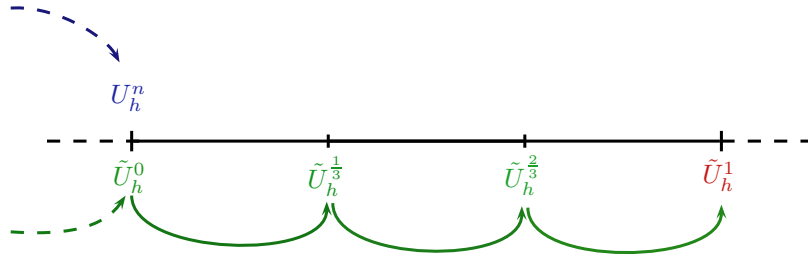


FIGURE 7.6 – Calcul dans la zone raffinée

Lorsque nous avons $\tilde{U}_{n,p}^{[r]}$, par définition, voir (7.10), nous avons

$$\tilde{U}_{n,p}^{[r]} = \frac{U_{n+1}^{[r]} + U_{n-1}^{[r]}}{2}, \quad (7.26)$$

ce qui permet d'obtenir $U_{n+1}^{[r]}$

$$U_{n+1}^{[r]} = 2\tilde{U}_{n,p}^{[r]} - U_{n-1}^{[r]}. \quad (7.27)$$

Passons à la résolution dans la zone grossière.

Construction de $U_{n+1}^{[g]}$:

L'équation (7.20) permet d'obtenir $U_{n+1}^{[g]}$

$$(\mathcal{M} + c \frac{\Delta t}{2} \mathcal{B}) U_{n+1}^{[g]} = 2\mathcal{M} U_n^{[g]} + (-\mathcal{M} + c \frac{\Delta t}{2} \mathcal{B}) U_{n-1}^{[g]} - c^2 \Delta t^2 (I - P) \mathcal{K} U_n - \Delta t^2 \mathcal{F}. \quad (7.28)$$

Nous obtenons ainsi $U_{n+1} = U_{n+1}^{[r]} + U_{n+1}^{[g]}$ et nous pouvons ensuite itérer le processus, voir la figure 7.7.

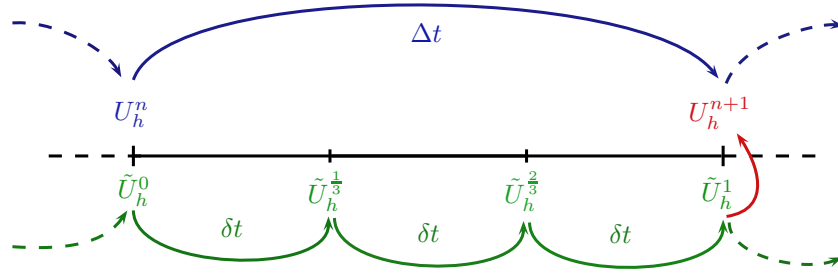


FIGURE 7.7 – Détermination sur tout le domaine de la solution au temps $(n+1)\Delta t$

7.4 Résultats numériques

Nous serons plus concis que dans le chapitre précédent. Plaçons nous sur un maillage comportant 243609 tétraèdres et comparons les cas P2 et P3. Pour la solution de référence nous prendrons la solution de la méthode directe sur le même maillage en P3. Nous allons analyser les résultats aux récepteurs R_2 , R_3 , R_4 et R_5 . Rappelons la configuration des récepteurs et de la source sur la figure 7.8. Pour chaque récepteur nous allons tracer d'une part la solution avec la méthode directe

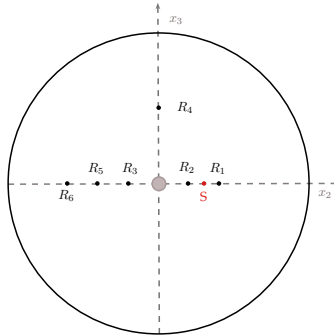


FIGURE 7.8 – Position des capteurs et de la source

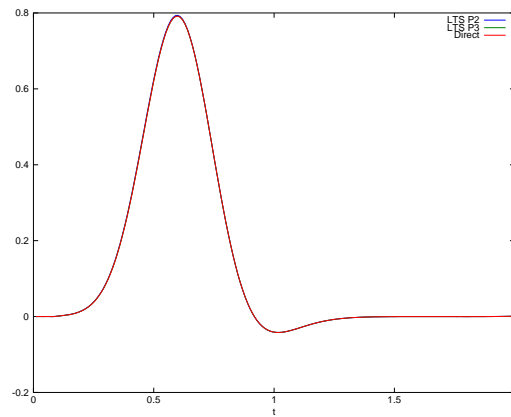
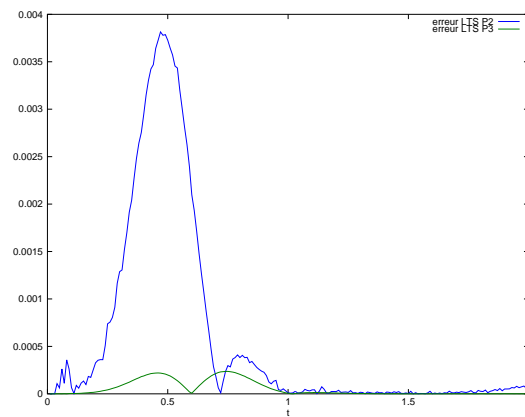
et avec la méthode des pas de temps locaux en P2 et P3 et d'autre part nous afficherons l'erreur absolue de la méthode des pas de temps locaux P2 et P3, la solution P3 donnée par la méthode

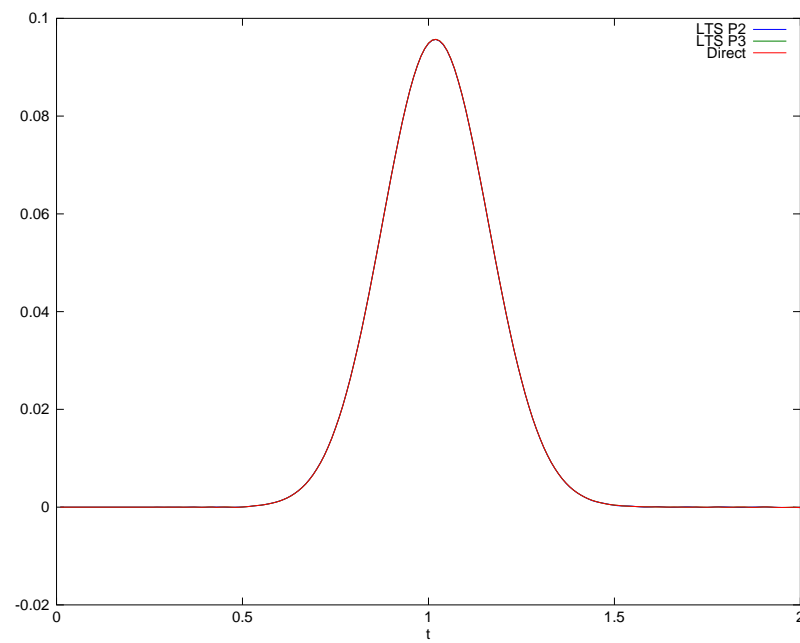
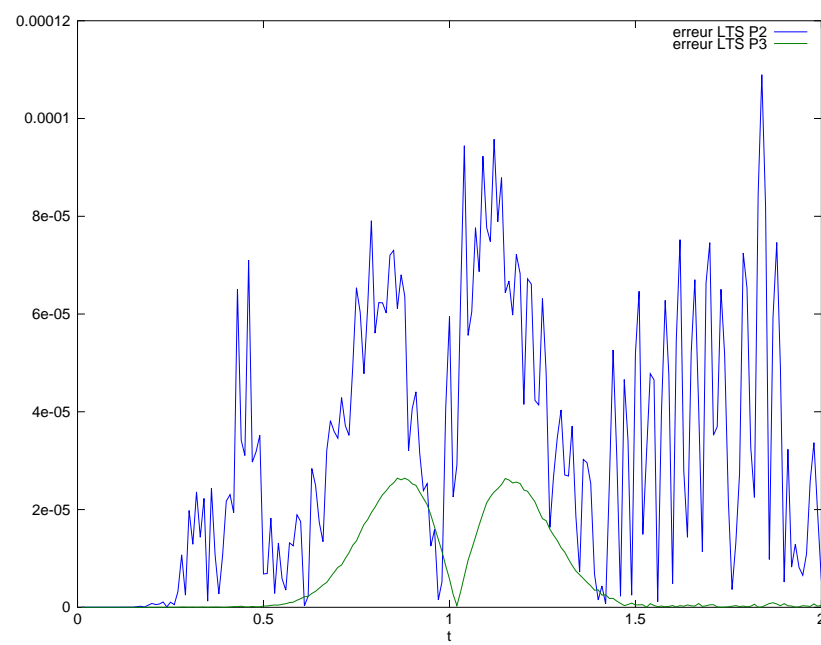
Méthode	Directe P2	Raff. espace-temps P2	Directe P3	Raff. espace-temps P3
Temps CPU (en s)	3 520	2 891	13 051	10 742

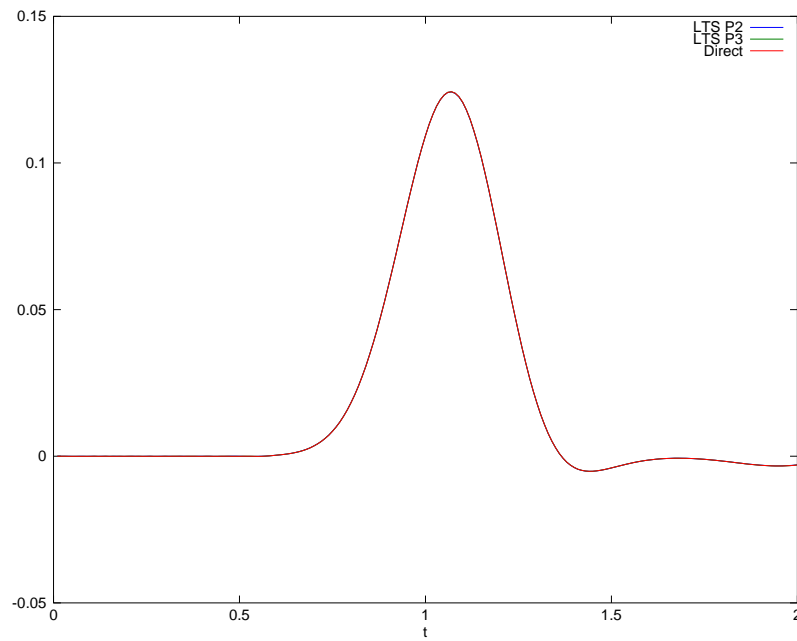
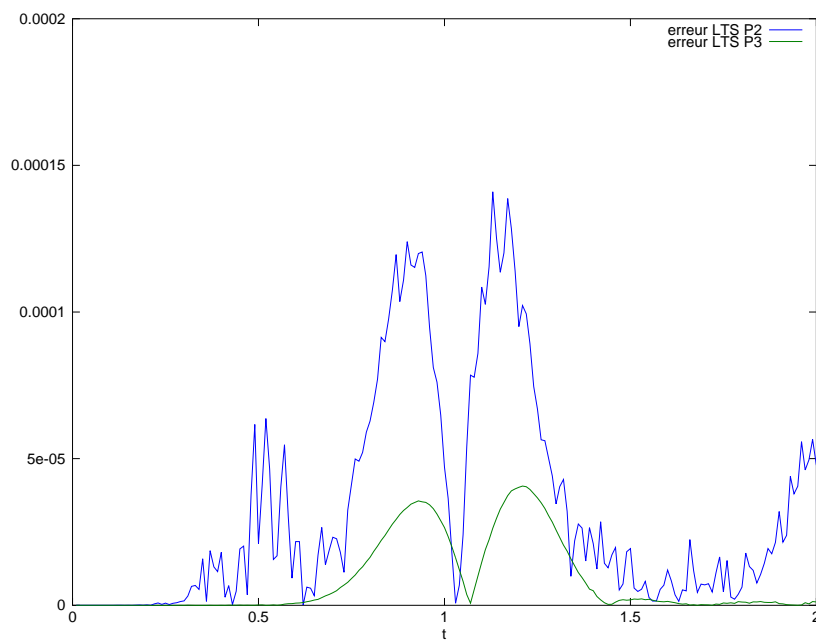
Tableau 7.1 – Temps de calcul

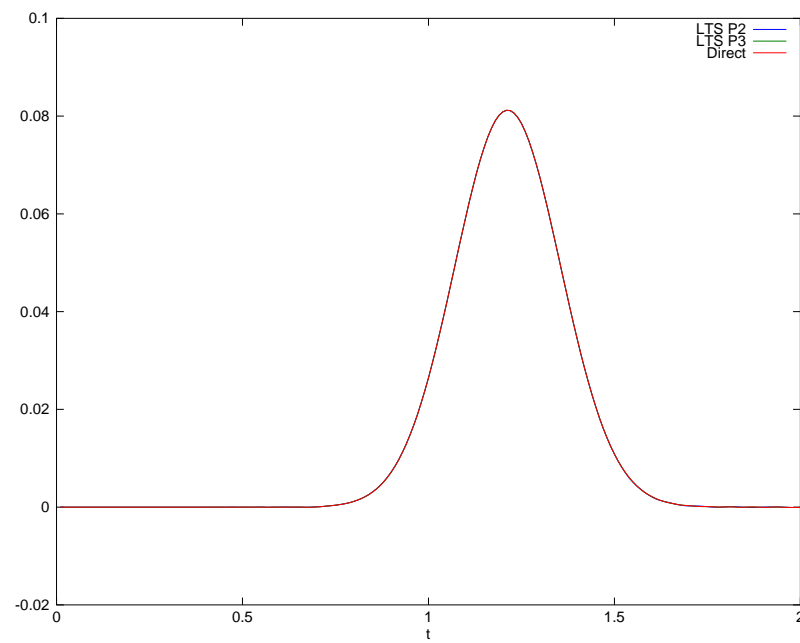
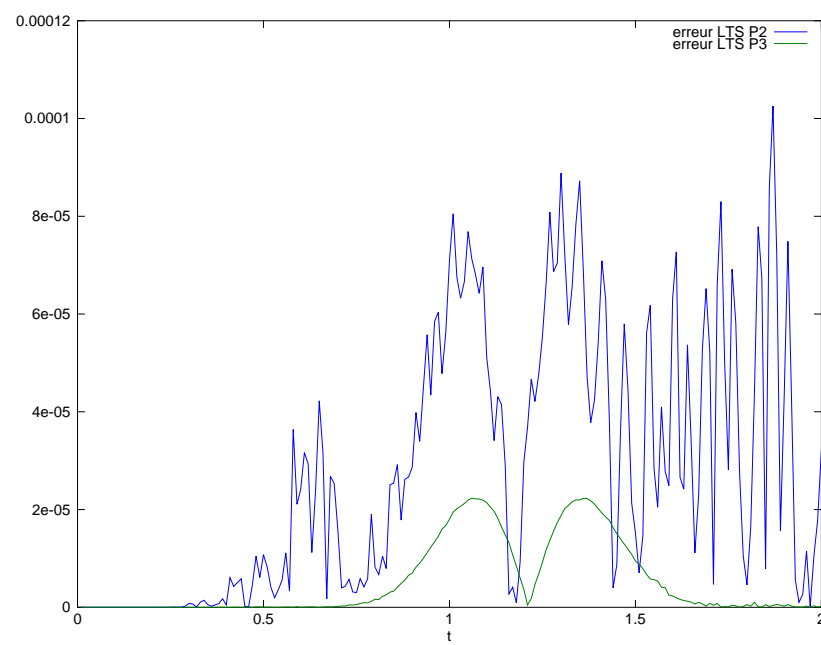
directe étant prise comme référence. Nous noterons LTS la méthode de raffinement espace temps qui signifie *Local Time stepping*. Les temps de calculs sont répertoriés dans le tableau 7.1.

Nous avons répertorié les résultats dans les figures 7.9, 7.10, 7.11, 7.12, 7.13, 7.14, 7.15 et 7.16.

FIGURE 7.9 – Comparaison entre la méthode LTS en P2, P3 et directe au récepteur R_2 FIGURE 7.10 – Erreur absolue de la méthode LTS en P2 et P3 au récepteur R_3

FIGURE 7.11 – Comparaison entre la méthode LTS en P2, P3 et directe au récepteur R_3 FIGURE 7.12 – Erreur absolue de la méthode LTS en P2 et P3 au récepteur R_3

FIGURE 7.13 – Comparaison entre la méthode LTS en P2, P3 et directe au récepteur R_4 FIGURE 7.14 – Erreur absolue de la méthode LTS en P2 et P3 au récepteur R_4

FIGURE 7.15 – Comparaison entre la méthode LTS en P2, P3 et directe au récepteur R_5 FIGURE 7.16 – Erreur absolue de la méthode LTS en P2 et P3 au récepteur R_5

Nous avons effectué ces expériences sur un maillage comportant trois zones : la plus raffinée entre l'obstacle et la sphère de rayon 0.1, la seconde entre les sphères de rayon 0.1 et 0.2 et enfin la dernière entre 0.2 et 1. Répertorions le nombre de tétraèdres dans chaque zone :

- zone raffinée : 901 tétraèdres ;
- zone intermédiaire : 1 401 tétraèdres ;
- zone grossière : 241 307 tétraèdres.

Nous pouvons vérifier que la somme fait bien le nombre de tétraèdres de tout le maillage à savoir 243 609 tétraèdres. Nous avons alors trois pas de temps différents associés à chacune des zones.

Interprétation des résultats

Nous pouvons remarquer que la méthode avec raffinement espace-temps est très proche de la solution obtenue avec la méthode directe et nous pouvons noter une amélioration en augmentant l'ordre comme nous pouvons nous y attendre.

Conclusion

L'étude est incomplète car nous avons du mal à vérifier la convergence de la solution. Cependant, les solutions données par la méthode directe et raffinement espace-temps coïncident ce qui laisse penser que les résultats sont corrects.

La majeure contribution dans cette partie est que nous avons mis en œuvre une stratégie multi-étages. Les temps de calculs sont ainsi réduits. Par contre, pour plus de trois niveaux de raffinement, nous observons une dégradation de la condition CFL. Ceci nécessite un nouveau développement. Ces algorithmes sont difficiles à implémenter mais beaucoup plus simples que sur des maillages non conformes (nœuds pendants), voir [23].

Conclusion Générale

Principaux résultats

Lors de cette thèse, nous avons développé et justifié des modèles réduits adaptés au calcul numérique pour la propagation des ondes comportant de petites hétérogénéités. Cette conclusion est une bonne occasion pour souligner et rappeler un certain nombre de résultats.

À propos des **modèles quasi-statiques de couche limite** :

En zone de champ proche, le développement asymptotique est régi par des équations quasi-statiques que nous avons appelées équations de Laplace emboîtées. Le temps n'apparaît plus comme une variable d'évolution mais comme un paramètre (des problèmes de Laplace sont résolus). Ceci justifie les approches classiquement utilisées par beaucoup de praticiens, voir [37], [38], [39] et [40], qui modélisent le comportement au voisinage d'un détail géométrique pour un modèle statique.

Du point de vue **numérique**, cette étude a fait apparaître qu'il est complexe de tester les modèles approchés en 3D.

Nous avons premièrement une forte augmentation du temps de calcul comparé à des problèmes similaires en 2D. Deuxièmement, l'implémentation des modèles réduits et l'automatisation des maillages deviennent plus difficiles qu'en 2D. Enfin, le point le plus important est la limite due à la mémoire vive. En trois dimensions d'espace, il est impossible de considérer des cas très raffinés tant la mémoire nécessaire au calcul est grande lorsque le pas de maillage diminue.

Perspectives

Il existe de nombreuses extensions possibles à cette thèse, comme le traitement des fils, voir [12], fentes, voir [41], perforations de petite taille devant la longueur d'onde ainsi que les configurations 2D. Ces dernières sont particulièrement difficiles à traiter en raison de l'apparition d'opérateurs en temps non locaux associés au symbole $\log(\omega)$. Cette question est pour l'instant ouverte.

Revenons maintenant au problème de la détection de petits obstacles. Le champ diffracté par un petit obstacle peut se mettre sous la forme d'une série dont les premiers termes en champ lointain sont

$$u_0(\mathbf{x}, t) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, t) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, t) + O_{\varepsilon \rightarrow 0}(\varepsilon^3). \quad (7.29)$$

Le premier terme u_1 de cette série ne dépend que de la valeur de u_0 au centre de l'hétérogénéité et prend la forme d'une source ponctuelle monopolaire dont l'amplitude est directement liée au diamètre de l'obstacle.

Le second terme u_2 est composé d'une source ponctuelle monopolaire et d'une source ponctuelle dipolaire (qui est nulle dans le cas d'un obstacle sphérique). Ce terme nous donne des indications sur l'orientation de la petite hétérogénéité. Les termes d'ordre supérieurs peuvent nous donner des indications plus précises sur la géométrie de l'obstacle. Grossièrement, la forme de l'obstacle est

cachée par les premiers termes du développement asymptotique. Il est donc extrêmement difficile de la déterminer. C'est cette voie que nous souhaitons explorer par la suite.

Une autre extension possible de cette thèse concerne la modélisation stochastique de la propagation des ondes dans les milieux comportant un grand nombre de particules diffuses de petites tailles. Nous ne connaissons pas ici la position de chaque particule mais la méthode proposée dans cette thèse permet de réaliser rapidement un grand nombre d'expériences numériques requises par l'algorithme de Monte-Carlo.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Solution fondamentale de l'équation des ondes scalaire

Nous rappelons la formule donnant la fonction de Green de l'équation des ondes et nous évaluons un produit de convolution qui correspond à une source monopolaire.

Lemme A.1. *Une solution fondamentale du d'alembertien $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ est la distribution G de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})$ définie par*

$$\langle G, \Phi \rangle = c \int_0^\infty \left(\int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{\Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt. \quad (\text{A.1})$$

Preuve A.1. *Le d'alembertien au sens des distributions de G est calculé par dualité*

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \langle G, \square \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} \\ \\ = c \int_0^\infty \left(\int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{\square \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} \right) dt \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Or en écrivant le laplacien en coordonnées sphériques le d'alembertien s'écrit de la manière suivante

$$\square \Phi = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi - \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) - \frac{1}{r^2} \Delta_{\Gamma}. \quad (\text{A.3})$$

Remarquons que d'après la formule de Green sur la sphère, nous avons

$$\int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{\Delta_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^3} ds_{\mathbf{x}} = \int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{\Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^3} \Delta_{\Gamma}(1) ds_{\mathbf{x}} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Soit $\bar{\Phi}(r, t)$ la valeur moyenne de Φ sur la sphère de rayon r

$$\bar{\Phi}(r, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Phi(r, \theta, \varphi, t) \sin(\theta) d\theta d\varphi. \quad (\text{A.5})$$

Nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{\partial_t^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial_t^2 \Phi(ct, \theta, \varphi, t)}{4\pi} \frac{t}{c} \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ \int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{\partial_r^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial_r^2 \Phi(ct, \theta, \varphi, t)}{4\pi} ct \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ \int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{2\partial_r \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{2\partial_r \Phi(ct, \theta, \varphi, t)}{4\pi} \sin(\theta) d\theta d\varphi. \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

On peut alors commuter l'intégrale et la dérivée seconde

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{\partial_t^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \frac{t}{c} \partial_t^2 \bar{\Phi}(ct, t), \\ \int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{\partial_r^2 \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = ct \partial_r^2 \bar{\Phi}(ct, t), \\ \int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{2\partial_r \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|^2} ds_{\mathbf{x}} = 2\partial_r \bar{\Phi}(ct, t). \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

En sommant ces trois expressions, il suit

$$\int_{\|\mathbf{x}\|=ct} \frac{\square \Phi(\mathbf{x}, t)}{4\pi\|\mathbf{x}\|} ds_{\mathbf{x}} = \frac{t}{c} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(ct, t) - ct \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(ct, t) - 2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(ct, t). \quad (\text{A.8})$$

Nous obtenons

$$\langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^4} = \int_0^\infty t \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(ct, t) - c^2 t \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(ct, t) - 2c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(ct, t) dt. \quad (\text{A.9})$$

Le calcul de cette intégrale s'effectue en introduisant la fonction

$$\Psi(r, t) = \frac{r}{c} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}(r, t) - 2\bar{\Phi}(r, t) - r \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(r, t) \quad (\text{A.10})$$

qui vérifie

$$\frac{d}{dt}(\Psi(ct, t)) = t \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial t^2}(ct, t) - c^2 t \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial r^2}(ct, t) - 2c \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial r}(ct, t). \quad (\text{A.11})$$

Ainsi il suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3} = \left[\Psi(ct, t) \right]_{t=0}^{t=+\infty} = -\Psi(0, 0) \\ \phantom{\langle \square G, \Phi \rangle_{\mathbb{R}^3}} = \overline{\Phi(0, 0)} = \Phi(0, 0). \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

C'est à dire

$$\square G(\mathbf{x}, t) = \delta_{\mathbf{x}} \delta_t \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}). \quad (\text{A.13})$$

Annexe B

Séparation de variables

B.1 Solution de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques

Nous allons rappeler la méthode de séparation de variable en résolvant l'équation de Laplace en coordonnées sphériques.

Nous avons les équations (B.1) qui relient les coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (\text{B.1})$$

où

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi < \varphi \leq \pi.$$

Le laplacien sphérique prend donc la forme :

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r u) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta u) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 u$$

Maintenant, nous pouvons vérifier que si nous prenons les solutions u de la forme

$$u(x, y, z) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (\text{B.2})$$

alors nous pouvons séparer les variables, ce qui nous permettra de trouver chaque facteur de (B.2) en résolvant une équation différentielle ordinaire.

Nous cherchons à résoudre $\Delta u = 0$. En introduisant l'écriture (B.2), on a :

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r (R\Theta\Phi)) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta (R\Theta\Phi)) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 (R\Theta\Phi) = 0$$

En multipliant par $r^2 \sin^2 \theta$ et en divisant par $R\Theta\Phi$, on a :

$$\left[\frac{1}{R} \partial_r (r^2 \partial_r R) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta) \right] \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \partial_\varphi^2 \Phi,$$

Ici on a séparé les variables. En effet, d'un côté ça ne dépend que de φ et de l'autre de θ et de r . Par conséquent, pour conserver l'égalité pour tout r , θ et φ , ça impose que les deux termes soient égaux à une constante, μ^2 . On obtient alors :

$$-\frac{1}{\Phi} \partial_\varphi^2 \Phi = \mu^2 \quad (\text{B.3})$$

$$\partial_\varphi^2 \Phi + \mu^2 \Phi = 0 \quad (\text{B.4})$$

par conséquent Φ est de la forme : $\Phi(\varphi) = A \cos(\mu\varphi) + B \sin(\mu\varphi)$. Ensuite pour R , Θ on a :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{R} \partial_r (r^2 \partial_r R) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta) \right] \sin^2 \theta &= \mu^2 \\
\frac{1}{R} \partial_r (r^2 \partial_r R) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta) &= \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \\
\frac{1}{R} \partial_r (r^2 \partial_r R) = \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta).
\end{aligned}$$

Le même raisonnement montre que les deux côtés de la dernière équation doivent être égaux à une constante, qu'on notera cette fois-ci $\nu(\nu + 1)$. On obtient alors les équations :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} \partial_r (r^2 \partial_r R) &= \nu(\nu + 1) \\
\partial_r (r^2 \partial_r R) - \nu(\nu + 1) R &= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent, R est de la forme $R(r) = Cr^\nu + Dr^{-1-\nu}$. Enfin pour θ on a :

$$\frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta) = \nu(\nu + 1) \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta) + [\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta}] \Theta = 0 \quad (\text{B.6})$$

Pour $\mu = 0$, alors l'équation (B.6) se réduit à l'équation de Legendre avec comme argument $x = \cos \theta$, qui pour $-1 < x < 1$ a pour solution générale :

$$\Theta = EP_\nu(\cos \theta) + FQ_\nu(\cos \theta),$$

où $P_\nu(x)$ et $Q_\nu(x)$ sont des fonctions de Legendre de première et seconde espèce. (voir [32])

B.2 Solution de l'équation de Helmholtz homogène

Proposition B.1. Si $u \in H_*^1(\mathbb{R}^3)$ vérifie dans un voisinage V de 0 :

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad \text{dans } V \setminus \{0\} \quad (\text{B.7})$$

alors on a :

$$u^j(x, k) = \sum_{m,n} (a_{m,n}(u^j) j_m(kr) + b_{m,n}(u^j) y_m(kr)) Z_{m,n}(\theta, \varphi)$$

où on note respectivement :

- $Y_{m,n}$ les harmoniques sphériques,
- j_m les fonctions de Bessel sphériques de première espèce qui sont C^∞ ,
- y_m les fonctions de Bessel sphériques de seconde espèce qui sont singulières ($y_m(z) = O(z^{-m-1})$),
- $b_{m,n}(u) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{y_{m,n}(kr)} \frac{\int_{\{|x|=r\}} u(x) Y_{m,n}(\theta, \varphi) dS_x}{\int_{\{|x|=r\}} |Y_{m,n}(\theta, \varphi)|^2 dS_x}$
- $a_{m,n}(u) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{j_{m,n}(kr)} \frac{\int_{\{|x|=r\}} (u(x) - l_{m,n}^1(u) Y_{m,n}(\theta, \varphi)) dS_x}{\int_{\{|x|=r\}} |Y_{m,n}(\theta, \varphi)|^2 dS_x}$

Preuve. Un tel u sera dit solution de l'équation de Helmholtz (voir [32]). Pour résoudre (B.7) en coordonnées sphériques, comme on l'a vu pour l'équation de Laplace, on cherche les solutions de la forme :

$$u = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi).$$

On applique la méthode de séparation de variables et nous obtenons les équations différentielles suivantes pour déterminer R , Θ et Φ :

$$\partial_\varphi^2 \Phi + \mu^2 \Phi = 0 \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \Theta) + [\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta}] \Theta = 0 \quad (\text{B.9})$$

$$\partial_r (r^2 \partial_r R) + [k^2 r^2 - \nu(\nu + 1)] R = 0 \quad (\text{B.10})$$

Les équations (B.8) et (B.9) sont identiques aux équations (B.4) et (B.6) qu'on avait obtenues avec la résolution de l'équation de Laplace. On a déjà vu la résolution, intéressons nous à la troisième équation (B.10). Pour cela, on va effectuer le changement de variable suivant : $R = r^{-\frac{1}{2}} v$, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_r (r^2 \partial_r (r^{-\frac{1}{2}} v)) + [k^2 r^2 - \nu(\nu + 1)] r^{-\frac{1}{2}} v &= 0 \\ 2r \partial_r (r^{-\frac{1}{2}} v) + r^2 \partial_r^2 (r^{-\frac{1}{2}} v) + [k^2 r^2 - \nu(\nu + 1)] r^{-\frac{1}{2}} v &= 0 \\ 2r \left(-\frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} v + r^{-\frac{1}{2}} \partial_r v \right) + r^2 \partial_r \left(-\frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} v + r^{-\frac{1}{2}} \partial_r v \right) + [k^2 r^2 - \nu(\nu + 1)] r^{-\frac{1}{2}} v &= 0 \\ -r^{-\frac{1}{2}} v + 2r^{\frac{1}{2}} \partial_r v + r^2 \left(\frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} v - r^{-\frac{3}{2}} \partial_r v + r^{-\frac{1}{2}} \partial_r^2 v \right) + [k^2 r^2 - \nu(\nu + 1)] r^{-\frac{1}{2}} v &= 0 \\ r^{\frac{3}{2}} \partial_r^2 v + r^{\frac{1}{2}} \partial_r v + [k^2 r^2 - \nu(\nu + 1) - \frac{1}{4}] r^{-\frac{1}{2}} v &= 0 \\ \partial_r^2 v + \frac{1}{r} \partial_r v + [k^2 - \frac{(\nu + \frac{1}{2})^2}{r^2}] v &= 0 \end{aligned}$$

On reconnait alors l'équation de Bessel pour $z = kr$, dont la solution générale peut être exprimée en termes de fonction cylindriques. En particulier, dans le cas où on est invariant par rotation et donc u indépendant de φ , on a :

$$u = r^{-\frac{1}{2}} [A J_{\nu + \frac{1}{2}}(kr) + B H_{\nu + \frac{1}{2}}^{(2)}(kr)] [C P_\nu(\cos \theta) + D Q_\nu(\cos \theta)],$$

où $J_\nu(z)$ est la fonction de Bessel du première espèce et $H_\nu^{(2)}$ est la fonction de Hankel de seconde espèce.

□

Annexe C

La fonction Q_n

C.1 Définition et propriétés

Définition C.1. *Nous avons*

$$Q_n^0(X) = \frac{q_n^n}{(2n)!} X^n (X+2)^n. \quad (\text{C.1})$$

Lemme C.1. *Pour $p \in \mathbb{N}$, nous avons la p -ième primitive de Q_n^0 nulle en 0 qui s'écrit*

$$Q_n^{-p}(X) = F(-n, n+1, n+p+1, -X/2) \frac{X^{n+p}}{(n+p)!}, \quad (\text{C.2})$$

avec F la fonction hypergéométrique définie par exemple dans [22] p384.

Preuve. Commençons par rappeler la définition de F pour tout $|X| < 1$

$$F(a, b; c; X) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(a)_s (b)_s}{(c)_s s!} X^s, \quad (\text{C.3})$$

avec

$$(a)_s = a(a+1) \cdots (a+s-1). \quad (\text{C.4})$$

Il suit

$$\begin{aligned} F(-n, n+1; n+p+1; -X/2) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{-n(-n+1) \cdots (-n+s-1) (n+1) \cdots (n+s)}{(n+p+1) \cdots (n+p+s) s!} (-X/2)^s, \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(n-s+1) \cdots (n+s)}{(n+p+1) \cdots (n+p+s) s!} (X/2)^s \end{aligned}$$

Cependant pour $s \geq n+1$ nous avons $(n-s+1) \cdots (n+s) = 0$, nous obtenons

$$F(-n, n+1; n+p+1; -X/2) = (n+p)! \sum_{s=0}^n \frac{(n+s)!}{(n-s)!(n+p+s)! s!} (X/2)^s.$$

D'autre part, par définition nous avons

$$Q_n^0(X) = \frac{q_n^n}{(2n)!} X^n (X+2)^n.$$

Remplaçons $q_n^n = (2n)!/(n!2^n)$ et développons $(X+2)^n$ à l'aide du binôme de Newton, nous obtenons

$$Q_n^0(X) = \sum_{\ell=0}^n \frac{1}{\ell!(n-\ell)!} \frac{X^{n+\ell}}{2^\ell}.$$

Pour primitiver plus facilement nous préférons cette formulation

$$Q_n^0(X) = \sum_{\ell=0}^n \frac{(n+\ell)!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{X^{n+\ell}}{(n+\ell)!2^\ell}. \quad (\text{C.5})$$

Nous obtenons la p -ième primitive nulle en 0

$$Q_n^{-p}(X) = X^{n+p} \sum_{\ell=0}^n \frac{(n+\ell)!}{(n-\ell)!(n+p+\ell)!\ell!} \left(\frac{X}{2}\right)^\ell. \quad (\text{C.6})$$

Nous reconnaissons alors la forme de la fonction hypergéométrique et nous avons

$$Q_n^{-p}(X) = \frac{X^{n+p}}{(n+p)!} F(-n, n+1; n+p+1; -X/2). \quad (\text{C.7})$$

Ceci termine la preuve. \square

C.2 Évaluation en -1

Évaluons Q_n^{-p} en $X = -1$, nous avons

$$Q_n^{-p}(-1) = \frac{(-1)^{n+p}}{(n+p)!} F(-n, n+1; n+p+1; 1/2). \quad (\text{C.8})$$

Afin de déterminer F , nous utilisons une propriété des fonctions hypergéométriques que nous pouvons trouver dans [22] page 387 et que nous rappelons ici

$$F(a, 1-a; b; 1/2) = \frac{2^{1-b} \sqrt{\pi} \Gamma(b)}{\Gamma(a/2 + b/2) \Gamma(b/2 - a/2 + 1/2)}, \quad (\text{C.9})$$

avec Γ la fonction Gamma. Il suit avec $a = -n$ et $b = n+p+1$

$$F(-n, n+1; n+p+1; 1/2) = \frac{2^{-n-p} \sqrt{\pi} (n+p)!}{\Gamma(p/2 + 1/2) \Gamma(n+p/2 + 1)}. \quad (\text{C.10})$$

Revenons à Q_n^{-p} , nous obtenons

$$Q_n^{-p}(-1) = \frac{(-1)^{n+p} 2^{-n-p} \sqrt{\pi}}{\Gamma(p/2 + 1/2) \Gamma(n+p/2 + 1)}. \quad (\text{C.11})$$

Séparons à présent le cas p pair et p impair.

Pour $p = 2p'$:

$$Q_n^{-p}(-1) = \frac{(-1)^{n+2p'} 2^{-n-2p'} \sqrt{\pi}}{\Gamma(p' + 1/2) \Gamma(n+p' + 1)}. \quad (\text{C.12})$$

Avec

$$\begin{cases} \Gamma(p' + \frac{1}{2}) = (p' - \frac{1}{2}) \times \cdots \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \Gamma(1/2), \\ \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \\ \Gamma(n+p' + 1) = (n+p')!, \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

il suit

$$Q_n^{-p}(-1) = \frac{(-1)^n 2^{-n-2p'}}{(p' - \frac{1}{2}) \times \cdots \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} (n+p')!}. \quad (\text{C.14})$$

Après simplifications, nous obtenons pour $p = 2p'$

$$Q_n^{-p}(-1) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \frac{p'!}{(2p')!(n+p')!}. \quad (\text{C.15})$$

Pour $p = 2p' + 1$:

Le même raisonnement donne pour $p = 2p' + 1$

$$Q_n^{-p}(-1) = \frac{-(-2)^n (n+p')!}{(p')!(2n+2p'+1)!}. \quad (\text{C.16})$$

Annexe D

Théorie des inégalités inverses

Soit u une solution de l'équation des ondes de classe \mathcal{C}^∞ . Nous notons u_p son approximation numérique obtenue par la méthode de Galerkin discontinue d'ordre p en espace et d'ordre 2 en temps.

Le papier [26] nous indique une première estimation d'erreur en norme L^2

$$\max_{t \leq T} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u(\cdot, t) - u_p(\cdot, t)\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \leq \text{Cte}_1(h^{p+1} + \Delta t^2), \quad (\text{D.1})$$

avec K un élément du maillage \mathcal{T}_h régulier et h la longueur caractéristique des tétraèdres. Nous introduisons d'autre part v_p l'interpolé de u sur l'élément fini P_p par morceaux. Le théorème 10 p 757 de [17] nous fournit des estimations d'erreurs précises

$$\max_{t \leq T} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|u(\cdot, t) - v_p(\cdot, t)\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \leq \text{Cte}_2 h^{p+1}, \quad (\text{D.2})$$

et

$$\max_{t \leq T} \|u(\cdot, t) - v_p(\cdot, t)\|_{L^\infty(K)} \leq \text{Cte}_3 h^{p-1/2}. \quad (\text{D.3})$$

Enfin, nous avons besoin d'une estimation dite inverse

$$\|w_p\|_{L^\infty(K)} \leq \text{Cte}_4 \frac{1}{h^{3/2}} \|w_p\|_{L^2(K)}. \quad (\text{D.4})$$

Celle-ci s'obtient par équivalence de norme sur le tétraèdre de référence \hat{K} . Comme l'espace de discrétisation est de dimension finie, nous avons

$$\|\hat{w}_p\|_{L^\infty(\hat{K})} \leq \text{Cte}_5 \|\hat{w}_p\|. \quad (\text{D.5})$$

Cette inégalité peut alors être remise à l'échelle en utilisant le fait que tous les tétraèdres sont réguliers

$$\|w_p\|_{L^\infty(K)} \leq \text{Cte}_4 \frac{1}{h^{3/2}} \|w_p\|_{L^2(K)}. \quad (\text{D.6})$$

En effet nous avons

$$\|w_p\|_{L^\infty(K)} = \|\hat{w}_p\|_{L^\infty(\hat{K})} \leq \text{Cte} \|\hat{w}_p\|_{L^2(\hat{K})}, \quad (\text{D.7})$$

et

$$\|\hat{w}_p\|_{L^2(\hat{K})}^2 = \int_{\hat{K}} |\hat{w}_p|^2 = \int_K |w_p|^2 \frac{1}{\text{vol}(K)} = h^{-3} \|w_p\|_{L^2(K)}^2. \quad (\text{D.8})$$

Nous avons alors tous les résultats pour conclure

$$\begin{aligned} \max_{t \leq T} \|u(\cdot, t) - u_p(\cdot, t)\|_{L^\infty(K)} &\leq \max_{t \leq T} \|u(\cdot, t) - v_p(\cdot, t)\|_{L^\infty(K)} + \max_{t \leq T} \|v_p(\cdot, t) - u_p(\cdot, t)\|_{L^\infty(K)} \\ &\leq \text{Cte}_5 h^{p-1/2} + \text{Cte}_4 \frac{1}{h^{3/2}} \max_{t \leq T} \|v_p(\cdot, t) - u_p(\cdot, t)\|_{L^2(K)}. \end{aligned}$$

De même, nous obtenons

$$\begin{aligned} \max_{t \leq T} \|v_p(\cdot, t) - u_p(\cdot, t)\|_{L^2(K)} &\leq \max_{t \leq T} \|v_p(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^2(K)} + \max_{t \leq T} \|u(\cdot, t) - u_p(\cdot, t)\|_{L^2(K)} \\ &\leq \text{Cte}_1(\Delta t^2 + h^{p+1}) + \text{Cte}_2 h^{p+1}. \end{aligned}$$

Il suit

$$\max_{t \leq T} \|u(\cdot, t) - u_p(\cdot, t)\|_{L^\infty(K)} \leq \text{Cte}_5 h^{p-1/2} + \text{Cte}_4 \left(\text{Cte}_1 \left(\frac{\Delta t^2}{h^{3/2}} + h^{p-1/2} \right) + \text{Cte}_2 h^{p-1/2} \right). \quad (\text{D.9})$$

En regroupant ces résultats, nous avons

$$\max_{t \leq T} \|u(\cdot, t) - u_p(\cdot, t)\|_{L^\infty(K)} \leq \text{Cte}(h^{p-1/2} + \frac{\Delta t^2}{h^{3/2}}). \quad (\text{D.10})$$

Nous pouvons par conséquent approcher la valeur ponctuelle de u en 0 par celle de u_p .

Bibliographie

- [1] M. Ainsworth, P. Monk, and W. Muniz. *Dispersive and dissipative properties of discontinuous Galerkin finite element methods for the second-order wave equation*. Journal of Scientific Computing, 2006.
- [2] H. Ammari, L. Halpern, and K. Hamdache. *Asymptotic behaviour of thin ferromagnetic films*. Asympptot. Anal., 2000.
- [3] Habib Ammari and Hyeonbae Kang. *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*. Springer, 2004.
- [4] Caroline Baldassari. *Modélisation et simulation numérique pour la migration terrestre par équation d'ondes*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2009.
- [5] Hélène Barucq, Julien Diaz, and Sébastien Tordeux. Analyse mathématique des phénomènes de propagation d'ondes.
- [6] J. D. D. Basade, M. K. Sen, and M. F. Wheeler. *The interior penalty discontinuous Galerkin method for the elastic wave equation : grid dispersion*. Geophys. J. Int., 2008.
- [7] A. Bayliss, M. Gunzburger, and E. Turkel. *Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions*. ICASE, 1980.
- [8] A. Bendali and K. Lemrabet. *The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation*. SIAM J. Appl. Math., 1996.
- [9] Abderrahmane Bendali, M'Barek Fares, P. Robert Kotiuga, Sophie Laurens, and Sébastien Tordeux. Lower and upper bounds for the rayleigh conductivity of perforated plates. 2012.
- [10] Haïm Brézis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*. Dunod, 1983.
- [11] M. Cassier and C. Hazard. *Multiple scattering of acoustic waves by small sound-soft obstacles in two dimensions : mathematical justification of the Foldy-Lax model*. Elsevier, vol. 50, p 18-28, 2013.
- [12] X. Claeys. *Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d'ondes par des fils minces*. PhD thesis, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2008.
- [13] M. Costabel and M. Dauge. *A singularly perturbed mixed boundary value problem*. Comm. Partial Differential Equations, 1996.
- [14] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. *Corner Singularities and Analytic Regularity for Linear Elliptic Systems. Part I : Smooth domains*. <hal-00453934v2>, 2010.
- [15] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems in corner domains - Smoothness and asymptotics of solutions*. Springer-Verlag, 1988.
- [16] Monique Dauge, Sébastien Tordeux, and Grégory Vial. Selfsimilar perturbation near a corner : matching versus multiscale expansions for a model problem.
- [17] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques, tome 6 Méthodes intégrales et numériques*. Masson, 1984.
- [18] G. V. Demidov, V. N. Martynov, and B. G. Mikhailenko. *A method for solving evolutionary problems based on the Laguerre step-by-step transform*.

- [19] Julien Diaz and Marcus J. Grote. Energy conserving explicit local time stepping for second-order wave equations. 2009.
- [20] B. Engquist and A. Majda. *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves*. Math. Comp., 1977.
- [21] B. Engquist and A. Majda. *Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations*. Comm. Pure Appl. Math., 1979.
- [22] Ronald F. Boisvert Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier and Charles W. Clark. *NIST handbook of mathematical functions*. NIST and Cambridge University press, 2010.
- [23] Jerónimo Rodríguez García. *Raffinement de Maillage Spatio-Temporel pour les Équations de l'Élastodynamique*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 2004.
- [24] Jean Giroire. *Etude de quelques problèmes aux limites extérieurs et résolution par équations intégrales*. PhD thesis, Université de Pierre et Marie Curie, 1987.
- [25] M. J. Grote, A. Schneebeli, and D. Schoötzau. *Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation*. SIAM J. Numer. Anal., 2006.
- [26] M. J. Grote and D. Schotzau. *Optimal error estimates for the fully discrete interior penalty DG method for the wave equation*. Springer Science + Business Media, 2008.
- [27] A. Gumerov and Ramani Duraiswami. *Fast multipole methods for the Helmholtz equation in three dimensions*. Elsevier, 2004.
- [28] A. M. Il'in. *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*. American Mathematical Society, 1991.
- [29] V. Jugnon. *Modélisation et simulation en photo-acoustique*. PhD thesis, École Polytechnique, 2010.
- [30] V. A. Kondrat'ev. *Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points*. Trans. Moscow Math. Soc., 1967.
- [31] S. Laurens, S. Tordeux, A. Bendali, M. Fares, and P.R. Kotiuga. *Lower and upper bounds for the Rayleigh conductivity of a perforated plate*. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2013.
- [32] N.N. Lebedev. *Spherical functions & their applications*. Dover publication, 1975.
- [33] C. M. Linton and P. A. Martin. *Multiple scattering by multiple spheres : a new proof of the Lloyd-Berry formula for the effective wave number*. SIAM J. Appl. Math., vol. 66, No. 5, pp 1649-1668, 2006.
- [34] W. Reed and T. Hill. *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*. Los Alamos Scientific Laboratory, Technical report LA-UR-73-479, 1973.
- [35] Sanchez-Hubert and Sanchez-Palencia. *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*. Dunod, 1992.
- [36] L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann éditeurs des sciences et des arts, 1998.
- [37] A. Taflove. *Computational electrodynamics : The finite-difference time-domain method*. Artech House Inc., 1995.
- [38] A. Taflove, K. Umashankar, and B. Becker. *Calculation and experimental validation of induced currents on coupled wires in an arbitrary shaped cavity*. IEEE Trans Antenna and Propagation, 1987.
- [39] A. Taflove, K. Umashankar, B. Becker, F. Harfoush, and K. S. Yee. *Detailed FDTD analysis of electromagnetic fields penetrating narrow slots and lapped joints in thick conducting screens*. IEEE Trans Antenna and Propagation, 1988.
- [40] F. Tatout. *Propagation d'une onde électromagnétique dans une fente mince. Propagation et réflexion d'ondes en élasticité. Application au contrôle*. PhD thesis, École normale supérieure de Cachan, 1996.

- [41] Sébastien Tordeux. *Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes*. PhD thesis, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2004.
- [42] Serguei Nazarov Vladimir Maz'ya and Boris Plamenevskij. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains*. Birkhäuser, 2000.

Index des notations

Introduction

ε	Longueur caractéristique de l'obstacle
λ	Longueur d'onde
ω	Pulsation
\mathbf{x}	Point appartenant à \mathbb{R}^3 (utilisé pour le champ lointain)
c	Célérité de l'onde
ω_ε	Obstacle de longueur caractéristique ε
Ω_ε	Domaine d'étude, à savoir \mathbb{R}^3 privé de l'obstacle
\widehat{B}	Obstacle adimensionné : $\widehat{B} = \omega_\varepsilon/\varepsilon$
f	Le terme source
\tilde{u}_ε	Solution exacte de l'équation des ondes acoustique dans Ω_ε
$\Gamma_{\omega_\varepsilon}$	Frontière de l'obstacle ω_ε
\mathcal{V}	Voisinage
supp	Support
δ_x	Taille du maillage en espace
f_i	Fonctions de jauge
\mathbf{X}	Point adimensionné appartenant à \mathbb{R}^3 (utilisé pour le champ proche) : $\mathbf{X} = \mathbf{x}/\varepsilon$
B_a	Boule centrée en l'origine et de rayon a : $B_a = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} < a\}$
Ω_ε^f	Domaine de champ lointain
Ω_ε^n	Domaine de champ proche
Ω_ε^m	Zone de recouvrement

Ω^*	Limite du domaine de champ lointain : $\Omega^* := \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$
$\widehat{\Omega}$	Limite du domaine de champ proche : $\widehat{\Omega} := \mathbb{R}^3 \setminus \widehat{B}$
C_a^b	Couronne centrée en l'origine de petit rayon a et de grand rayon b
B_a^c	Extérieur de la boule centrée en l'origine et de rayon a
u_ε	Développement asymptotique en champ lointain
u_i	Termes du développement asymptotique en champ lointain
$u_{i,p}$	Termes du développement de Taylor au voisinage de l'origine de u_i
U_ε	Développement asymptotique en champ proche
U_i	Termes du développement asymptotique en champ proche
$U_{i,p}$	Termes du développement de Taylor au voisinage de l'infini de U_i
$\Delta_{\mathbf{X}}$	Opérateur Laplacien en variables \mathbf{X} : $\Delta_{\mathbf{X}} = \varepsilon^2 \Delta$
(r, θ, φ)	Coordonnées sphériques (utilisées en champ lointain)
(R, θ, φ)	Coordonnées sphériques (utilisées en champ proche) avec $R = r/\varepsilon$

Chapitre 1

α	Multi-indice de taille 3 : $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$
T_α	Distribution solution de l'équation (1.2)
S'	Espace des distributions tempérées / dual topologique de l'espace de Schwartz S
λ	Fonction test de \mathbb{R}
δ	Distribution de Dirac
$\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \delta$	Dérivée α de la distribution de Dirac δ
\otimes	Produit tensoriel
G^-	Solution causale de l'équation des ondes
T_α^-	Solution causale de l'équation (1.2)
t^-	Temps retardé : $t^- = t - r/c$
\widehat{T}	Transformée de Fourier de T
k	Nombre d'onde : $k = 2\pi/\lambda$

$\widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}^{-}$	Solution sortante de l'équation de Helmholtz (p 38)
$\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^{-}$	Multipôle fréquentiel associé à la solution sortante (p 38)
$\widehat{\mathbf{S}}_{\alpha}$	Distribution de support $\{\mathbf{0}\}$ (p 38)
$\widehat{\mathbf{P}}_{\alpha}$	Polynôme de variable $-ik$ (p 38)
$(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m$	Réel indépendant de k (p 39)
$(\mathbf{B}_{\alpha})_n^m$	Réel indépendant de k (p 39)
$(\mathbf{A}_{\alpha})_n^m$	Réel indépendant de k (p 39)
$(\mathbf{B}_{\alpha})_n^m$	Réel indépendant de k (p 39)
q_n	Polynôme de degré n de la variable complexe $\frac{1}{z}$ (p 38)
$h_n^{(1)}$	Fonction de Hankel sphérique du premier ordre (p 38)
q_n^{ℓ}	Réel dépendant de n et ℓ (p 38)
\cos_n^m	Fonction définie sur la sphère unité (p 38)
\sin_n^m	Fonction définie sur la sphère unité (p 38)
P_n^m	Fonction de Legendre associée d'ordre entier m et degré n (p 38)
$(n)_{\ell}$	Symbole de Pochhammer (p 39)
C_n^m	Famille de fonctions contenant \cos_n^m (p 40)
S_n^m	Famille de fonctions contenant \sin_n^m (p 40)
\mathcal{F}^{-1}	Transformée de Fourier inverse (p 49)
M_{α}^{-}	Multipôle en domaine temporel d'ordre α (p 49)
S_{α}	Parties singulières en domaine temporel (p 50)
T_{α}^{+}	Solution anti-causale de l'équation (1.84) (p 52)
G^{+}	Solution fondamentale anti-causale de l'équation des ondes (p 52)
t^{+}	Temps avancé : $t^{+} = t + r/c$ (p 52)
$\widehat{\mathbf{T}}_{\alpha}^{+}$	Solution entrante de l'équation de Helmholtz (p 53)
$\widehat{\mathbf{M}}_{\alpha}^{+}$	Multipôle fréquentiel associé à la solution entrante (p 53)
T_{α}^{+}	Solution anti-causale de l'équation des ondes (p 53)
M_{α}^{+}	Multipôle en domaine temporel associé à la solution anti-causale (p 53)

$\text{Reg}_{\alpha}^{[\lambda]}$	Solution régulière de l'équation des ondes (p 54)
Q_n^k	Polynômes (p 57)
$\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda]$	Famille de solutions régulières de l'équation des ondes (p 56)
$M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda]$	Famille de solutions causales de l'équation des ondes (p 56)
$M_{m,n}^{\text{pol},+}[\lambda]$	Famille de solutions anti-causales de l'équation des ondes (p 56)
pol	Variable pouvant prendre les valeurs cos et sin (p 56)
$M_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda]$	Éléments du développement de Taylor de $M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda]$ (p 73)
$\text{Reg}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda]$	Éléments du développement de Taylor de $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda]$ (p 73)
$\widetilde{\text{Reg}}_{m,n,p}^{\text{pol}}[\lambda]$	Éléments du développement de Taylor de $\text{Reg}_{m,n}^{\text{pol}}[\lambda]$ sans la partie angulaire (p 75)
$\widetilde{M}_{m,n,p}^{\text{pol},-}[\lambda]$	Éléments du développement de Taylor de $M_{m,n}^{\text{pol},-}[\lambda]$ sans la partie angulaire (p 75)

Chapitre 2

$\sum_{m,n,\text{pol}}$	Symbole simplifié pour une triple somme (p 78)
Δ_{Γ}	Laplacien Beltrami (p 80)
H_{Neu}	Espace variationnel pour les conditions de Neumann (p 87)
U_{as}	Comportement asymptotique de la solution U (p 87)
U_{∞}	Limite en l'infini de la solution U (p 87)
\overline{U}_{R^*}	Valeur moyenne de U sur la sphère Γ_{R^*} (p 87)
H_0	Espace de Beppo-Levi (p 88)
H_{Dir}	Espace variationnel pour les conditions de Dirichlet (p 92)

Chapitre 3

$U_{i,\text{sing}}$	Partie non variationnelle de U_i (p 100)
$U_{i,\text{reg}}$	Partie régulière de U_i (p 100)
$\text{rac}_{\varepsilon,I}$	Fonction de raccord d'ordre I en variables de champ lointain (p 101)
$\text{Rac}_{\varepsilon,I}$	Fonction de raccord d'ordre I en variables de champ proche (p 101)

Chapitre 4

$u_{\varepsilon,I}$	Troncature de la série de la solution du champ lointain (p 106)
$U_{\varepsilon,I}$	Troncature de la série de la solution du champ proche (p 106)
$\tilde{u}_{\varepsilon,I}$	Approximation uniformément valide (p 106)

Chapitre 5

NT_h	Nombre d'éléments du maillage (p 125)
\mathcal{T}_h	Maillage associé au domaine Ω_ε (p 125)
K	Élément du maillage, ici une tétraèdre (p 125)
V_h	Espace d'approximation (p 125)
$\mathcal{P}_p(K)$	Espace des polynômes de degré inférieur ou égal à p (p 125)
\mathcal{F}_i	Ensemble des faces internes (p 125)
\mathcal{F}_b	Ensemble des faces frontières (p 125)
n^\pm	Vecteurs normaux orientés vers l'extérieur de l'élément K^\pm (p 125)
φ^\pm	Traces d'une fonction φ sur K^\pm (p 125)
$[[\varphi]]$	Saut d'une fonction φ à travers une face (p 127)
$\{\{\varphi\}\}$	Moyenne d'une fonction φ sur une face (p 127)
\mathcal{M}	Matrice de masse (p 130)
\mathcal{K}	Matrice de raideur (p 130)
\mathcal{B}	Matrice d'amortissement (p 130)
F_K	Fonction affine permettant de passer du tétraèdre de référence au tétraèdre K (p 130)
A_K	Jacobien de F_K (p 131)
Φ_i^K	Fonctions de Lagrange de l'élément K (p 132)
N_p	Nombre de degrés de liberté d'un élément K (p 132)
P_j	Coordonnées des degrés de liberté d'un élément K (p 132)

- NP_h Nombre de degrés de liberté associés au maillage \mathcal{T}_h (p 132)
- \hat{F} Face de référence (p 138)
- \hat{F}_i Faces du tétraèdre de référence (p 138)

Chapitre 6

- $u_{\varepsilon,0}$ Solution en champ lointain d'ordre 0 (p 144)
- $u_{\varepsilon,1}$ Solution en champ lointain d'ordre 1 (p 144)
- $u_{\varepsilon,2}$ Solution en champ lointain d'ordre 2 (p 144)
- $u_{\varepsilon,2}^m$ Solution en champ lointain d'ordre 2 modifiée (p 144)
- R_i Récepteurs (p 148)

Chapitre 7

- Δt Pas de temps dans la zone grossière (p 177)
- δt Pas de temps de la zone raffinée (p 177)
- $\mathcal{T}_{h,r}$ Ensemble des tétraèdres appartenant à la zone raffinée (p 177)
- $\mathcal{T}_{h,g}$ Ensemble des tétraèdres appartenant à la zone grossière (p 177)
- $U_h^{[r]}$ Solution dans la zone raffinée (p 177)
- $U_h^{[g]}$ Solution dans la zone grossière (p 177)
- P Opérateur de projection sur la zone raffinée (p 177)
- \tilde{U} Moyenne de U entre deux petits pas de temps (p 178)
- $\tilde{U}_{n,m}$ Discrétisation de \tilde{U} dans les deux échelles de temps (p 178)
- $\tilde{U}^{[r]}$ Solution \tilde{U} dans la zone raffinée (p 178)

